

# Demande de traitement et risque exogène

Han Bleichrodt\*, David Crainich† et Louis Eeckhoudt‡

December 13, 2001

## 1 Introduction

La perception des risques médicaux et l'attitude des médecins et des patients face à ceux-ci jouent un rôle essentiel dans les choix en matière de santé. La littérature économique a dès lors cherché à intégrer la façon dont les risques influencent les préférences des patients dans les modèles représentant les prises de décisions médicales. Les précurseurs en la matière étant incontestablement Pauker et Kassirer (1975) et (1980) avec deux articles traitant respectivement de la décision de traitement en présence de risques diagnostiques et de l'apport des tests diagnostiques. A leur suite, d'autres contributions (Eeckhoudt, Lebrun, Saily (1984) et (1985), Doubilet (1984) entre autres) vont utiliser la théorie du risque pour éclairer les choix médicaux. L'hypothèse dominante dans cette littérature est qu'il n'existe qu'une seule source de risque, portant soit sur l'état de santé du patient, soit sur sa durée de vie espérée.

En réalité, il arrive souvent que divers risques coexistent (les patients pouvant contracter simultanément plusieurs maladies) et que ces risques affectent à la fois l'état de santé de santé du patient et sa durée de vie attendue. Les contributions de Fryback et Lawrence (1997) et de Harris et Nease (1997) sont les premières qui, dans le cadre de modèles de prises de décisions médicales, ont souligné l'importance de la prise en compte de la présence de

---

\*Erasmus University, Rotterdam

†Facultés Universitaires Saint-Louis, Bruxelles

‡Facultés Universitaires Catholiques de Mons et de Lille

risques exogènes<sup>1</sup> dans le cadre d'analyses coûts-efficacité.

Les travaux de Doherty et Schlesinger (1983), Kimball (1990), Eeckhoudt et Kimball (1992) ou Eeckhoudt, Gollier et Schlesinger (1996) ont montré, dans un contexte de risques purement financiers, que la présence de ces risques exogènes modifiait les équilibres notamment en matière de demande d'assurance. L'idée de ces contributions est que les agents sont prêts à supporter une certaine quantité totale de risque et que, confrontés à des risques contre lesquels ils ne peuvent s'assurer, ils réagissent en améliorant leur couverture contre les risques assurables. Le fait que les risques financiers soient unidimensionnels alors que les risques de santé sont par essence multidimensionnels (une maladie affecte, entre autres, l'état de santé, la durée de vie espérée et la richesse de l'individu) implique qu'on ne puisse transposer directement ces résultats à des problèmes de prises de décisions médicales.

L'objectif de ce travail est d'analyser l'impact de l'introduction d'un risque incontrôlable affectant la durée de vie sur la demande d'un traitement comportant des risques thérapeutiques. L'âge du patient étant un facteur déterminant dans la prise de décision médicale face à une intervention présentant des risques, il nous a semblé opportun d'intégrer cette variable en utilisant une fonction d'utilité dépendant de l'état de santé et de la durée de vie du patient.

Nous présentons le modèle à la section 2 et, dans la mesure où ils sont souvent confondus, nous rappelons la différence entre les risques diagnostiques et thérapeutiques. Nous analysons aux sections 3 et 4 la sélection optimale de traitement lorsque le nombre d'année de vie est certain tandis que son état de santé est aléatoire. Nous montrons à la section 3 que, conformément à l'intuition, un patient manifestant de l'aversion vis-à-vis du risque de santé sélectionnera toujours un traitement moins intense qu'un patient neutre vis-à-vis de ce risque. Nous étudions à la section 4 la façon dont la variation de la durée de vie affecte ce résultat en montrant qu'un individu dont l'aversion au risque croît avec la durée de vie sélectionnera un traitement moins intensif si sa durée de vie augmente avec certitude. Une fois encore, ce résultat est tout à fait intuitif dans la mesure où, suivant cette dernière hypothèse, plus il lui reste un grand nombre d'années à vivre, plus un individu rejette le risque de

---

<sup>1</sup>Nous parlerons dans le présent travail de risques exogènes ou incontrôlables pour définir un risque dont l'individu ne peut modifier les caractéristiques (probabilité, gravité). Lorsque l'on considère des risques purement financiers, les risques exogènes ou "background risks" sont ceux que l'on ne peut prévenir et contre lesquels on ne peut s'assurer.

santé et décide par conséquent de recourir plus modérément au traitement risqué.

Alors que, dans la première partie du travail, la discussion porte plutôt sur le fait que la fonction d'utilité est multidimensionnelle, les sections 5 et 6 s'articulent autour du problème des risques multiples puisque nous y considérons que la durée de vie est aléatoire. Les résultats proposés à la section 5 qui analyse l'intensité de traitement lorsqu'on introduit le risque exogène de durée montrent que les résultats sont ambigus et difficilement interprétables. Par contre, nous montrons à la section 6 que toute amélioration de l'espérance de vie conduit à une réduction de la demande de traitement si l'aversion au risque de santé croît avec la durée de vie du patient (hypothèse que nous avons retenue comme étant plausible). Il en ressort qu'entre deux individus dont on peut penser que l'un meure avant l'autre, le premier sélectionnerait un traitement moins intensif que le second.

Nous traitons ces problèmes successivement dans le cas général et dans le cadre d'un modèle particulier répandu en économie de la santé, le modèle QALY (sections 4 et 5). Nous montrons que, compte tenu des fonctions d'utilités proposées par ce modèle QALY, le patient ne modifie pas son traitement lorsqu'il fait face à un risque exogène de durée de vie et ce, quelque soit l'hypothèse retenue sur cette durée de vie (certaine ou aléatoire). L'évaluation de nos résultats sur base du modèle QALY devrait nous permettre de tester ses capacités prédictives.

Nous terminons l'article par une brève conclusion.

## 2 Le modèle

Nous considérons le cas d'un patient ayant contracté une maladie particulière et dont l'état de santé peut être quantifié. En présence de cette maladie, son état de santé est égal à  $H_A$  (nous supposons pour alléger les notations et sans perte de généralité que  $H_A = 0$ ). Un traitement existe pour cette maladie, mais son effet est risqué. Le traitement peut être bénéfique et améliorer l'état de santé du patient, auquel cas, l'amélioration est supposée proportionnelle (le coefficient de proportionnalité étant  $b$ ) au niveau de traitement sélectionné. Mais ce même traitement présente aussi des risques thérapeutiques et peut donc détériorer l'état de santé de l'individu. Ici encore, cette détérioration est proportionnelle (avec un coefficient de proportionnalité de  $-c$ ) à l'intensité du traitement. La probabilité que le traitement

soit bénéfique (resp. préjudiciable) au patient est de  $p$  (resp.  $1-p$ ) et il ne peut modifier ces probabilités par son comportement. L'intensité de traitement  $n$  est présumée continue et ne peut être négative. Pour résumer, un patient atteint de cette maladie et qui sélectionne une intensité de traitement  $n$  se retrouve au niveau de santé  $n.b$  (resp.  $-n.c$ ) avec une probabilité  $p$  (resp.  $1-p$ ).

L'utilité du patient dépend de son état de santé ( $H$ ) et de sa durée de vie ( $T$ ) et sa fonction d'utilité s'écrit comme suit<sup>2</sup>:

$$U = U(H, T) \tag{1}$$

L'utilité marginale d'une amélioration de l'état de santé est dénotée  $U_1$  et l'utilité marginale de la durée de vie est dénotée  $U_2$ . L'utilité marginale de l'individu par rapport à ces deux arguments est positive ( $U_1 > 0$  et  $U_2 > 0$ ). Le patient est supposé manifester de l'aversion par rapport au risque de santé. La dérivée seconde de la fonction d'utilité par rapport à  $H$ , dénotée  $U_{11}$ , est donc négative. De même,  $U_{22}$ , la dérivée seconde de la fonction d'utilité par rapport à  $T$  est aussi négative, ce qui indique une aversion vis-à-vis du risque de durée de vie. La dérivée croisée est dénotée  $U_{12}$ . Le problème du patient est donc celui du choix optimal de l'intensité  $n$  (qui est la variable de décision) d'un traitement présentant des risques thérapeutiques<sup>3</sup>.

Il convient ici de bien faire la distinction entre les risques thérapeutiques, traités dans ce travail, et les risques diagnostiques, analysés entre autres dans les articles évoqués plus loin de Pauker et Kassirer (1975) et de Eeckhoudt, Lebrun et Saily (1985).

Un risque thérapeutique est associé à une intervention médicale lorsque l'impact de cette intervention sur l'état de santé est incertain. Certaines interventions peuvent en effet avoir des effets négatifs sur l'état de santé. On est bien ici dans un cas où la maladie a été clairement identifiée mais où le risque porte sur les effets du traitement.

On se trouve en présence d'un risque diagnostique lorsque, compte tenu des symptômes présentés par un patient, un médecin ne peut affirmer avec

---

<sup>2</sup>Pour simplifier l'exposé du problème, nous n'intégrons pas l'élément richesse dans la fonction d'utilité. Le modèle présenté peut cependant être plausible si le traitement est gratuit pour l'individu (parce que remboursé par une assurance sociale par exemple).

<sup>3</sup>Nous supposons donc que le médecin agit comme un agent parfait vis-à-vis du patient et informe complètement ce dernier des conséquences de la maladie.

certitude que le patient présente une maladie particulière. Il n'y a pas ici d'incertitude portant sur les effets de l'intervention médicale qui sera bénéfique si le patient présente en effet la maladie. Par contre, cette même intervention sera souvent préjudiciable pour la santé du patient si elle est entreprise alors que le patient ne présente pas cette maladie.

Les effets incertains d'une intervention médicale sur la santé du patient font que les risques thérapeutiques et diagnostiques sont souvent confondus. Ces effets incertains du traitement ont cependant des origines diverses et ont par conséquent des implications opposées sur le risque supporté par le patient. En effet, lorsque l'incertitude porte sur l'efficacité de la procédure thérapeutique, le patient part d'une situation certaine (il a la maladie) et la mise en oeuvre du traitement peut soit être bénéfique soit être préjudiciable pour sa santé. Entreprendre la thérapie augmente bien le risque de santé auquel s'expose le patient. Par contre lorsque le patient part d'une situation initiale incertaine et que le traitement réduit le stock de santé lorsque celui-ci est élevé (pas de maladie) mais l'augmente lorsqu'il est faible (le patient est malade), l'incertitude du patient se réduit s'il entreprend le traitement. Par conséquent, la mise en oeuvre du traitement réduit l'incertitude en présence de risques diagnostiques.

### 3 Décision de traitement sans risque de durée de vie

Nous envisageons la situation d'un patient ayant contracté la maladie et pouvant recourir à un traitement présentant des risques thérapeutiques. Nous considérons dans un premier temps le cas hypothétique d'un patient connaissant avec certitude sa durée de vie ( $T$ ). Le problème de décision auquel il fait face est le suivant:

$$Max_n EU = p.U(nb, T) + (1 - p).U(-nc, T) \quad (2)$$

La condition de premier ordre associée au problème de maximisation s'écrit:

$$\frac{\delta EU}{\delta n} = G = p.b.U_1(nb, T) - c.(1 - p).U_1(-nc, T) = 0 \quad (3)$$

Cette condition de premier ordre nous assure simplement qu'à l'équilibre, le bénéfice marginal attendu d'une unité de traitement ( $p.b.U_1(n.b, T)$ ) est égal à son coût marginal attendu ( $c.(1-p).U_1(-n.c, T)$ ).

La condition du second ordre de ce problème est la suivante:

$$\frac{\delta^2 EU}{\delta n^2} = S = p.b^2.U_{11}(nb, T) + c^2.(1-p).U_{11}(-nc, T) < 0 \quad (4)$$

La concavité de la fonction d'utilité par rapport à l'état de santé ( $U_{11} < 0$ ) nous assure que le signe de l'équation 4 est négatif et que  $n$  est bien un maximum.

### 3.1 Le patient est neutre vis-à-vis du risque de santé

Pour le patient neutre rapport au risque de santé ( $U_{11} = 0$ ), l'utilité marginale de la santé est indépendante de l'état de santé. L'équation 3 devient alors:

$$\frac{\delta EU}{\delta n} = U_1(., T).[p.b - c.(1-p)] = 0 \quad (5)$$

Il est facile de constater que  $p.b - c.(1-p) = 0$  est une condition nécessaire pour que l'équation 5 soit égale à zéro. Cette équation définit un seuil de probabilité à partir duquel le patient entreprend le traitement risqué. On voit en effet que :

- Si  $p.b - c.(1-p) > 0$  ou si  $p > \frac{c}{b+c}$ , le signe de l'équation 5 est toujours positif et l'intensité de traitement choisie à l'équilibre sera maximale ( $n = n^{max}$ );
- Si  $p.b - c.(1-p) < 0$  ou si  $p < \frac{c}{b+c}$ , le signe de l'équation 5 est toujours négatif et la patient préférera ne pas avoir recours au traitement ( $n = 0$ ).

Pour le patient neutre par rapport au risque de santé, le bénéfice et le coût marginal attendu du traitement ne dépendent pas de l'intensité de celui-ci. Le patient décide simplement d'entreprendre ce traitement (et de pousser son intensité jusqu'à son maximum) pour autant que son résultat espéré soit favorable, ce qui est le cas si la probabilité que le traitement soit bénéfique

est supérieure à un certain seuil ( $p > \frac{c}{b+c}$ ). Si cette probabilité est inférieure à ce même seuil, le patient n'y aura pas recours. La neutralité du patient vis-à-vis du risque de santé fait que le résultat du problème dépend uniquement des caractéristiques du traitement (et non pas des préférences ou de la durée de vie du patient) et que les deux résultats de ce problème sont des solutions en coin ( $n = 0$  ou  $n = n^{max}$ ). La demande de traitement d'un patient neutre vis-à-vis du risque de santé est représentée graphiquement à la figure 1.

On peut faire le rapprochement entre ce résultat et celui de Pauker et Kassirer (1975) analysant les risques diagnostiques en considérant que les patients sont neutres vis-à-vis du risque. Là aussi, la probabilité  $p = \frac{c}{b+c}$  constitue un seuil à partir duquel le traitement sera entrepris<sup>4</sup>. Dans les deux cas, le traitement est administré si son espérance de résultat est favorable, c'est-à-dire si la probabilité de maladie est assez élevée dans le cas des risques diagnostiques et si la probabilité de réussite du traitement est suffisamment grande dans le cas des risques thérapeutiques.

### 3.2 Le patient manifeste de l'aversion vis-à-vis du risque de santé

Lorsque le patient manifeste de l'aversion vis-à-vis du risque de santé, l'utilité marginale de son état de santé est décroissante ( $U_1(n.b, T) < U_1(-n.c, T)$ ). La condition de premier ordre (équation 3) est dès lors toujours négative si  $p = \frac{c}{b+c}$ , et le patient préfère ne pas avoir recours au traitement. Une condition nécessaire pour que le patient manifestant de l'aversion au risque décide d'entreprendre ce traitement est que:

$$p > \frac{c}{b+c} \tag{6}$$

Nous supposerons que c'est toujours le cas dans la suite de ce travail pour que la solution du problème 3 soit intérieure.

Lorsque le patient manifeste de l'aversion pour les risques de santé, l'utilité marginale d'une amélioration de son état de santé est décroissante et dépend donc du niveau de cet état de santé. Il en résulte que, pour des faibles valeurs

---

<sup>4</sup>Signalons que dans l'article de Pauker et Kassirer, les paramètres  $b$  et  $c$  ont une signification très proche à celle de ce modèle puisqu'ils indiquent respectivement le bénéfice unitaire du traitement administré à un patient malade et le préjudice unitaire du traitement s'il est administré à un patient en bonne santé.

de  $n$  et pour des valeurs de  $p$  supérieures au seuil minimum (voir condition nécessaire 6), le signe de l'équation 3 est positif, indiquant que le bénéfice marginal attendu du traitement est supérieur à son coût marginal attendu et que l'individu décide donc intensifier le traitement. Au fur et à mesure que  $n$  augmente, le bénéfice marginal  $U_1(n, b, T)$  se réduit et le coût marginal  $U_1(-n, c, T)$  augmente jusqu'à ce qu'on obtienne l'égalité de l'équation 3. La figure 1 nous permet de visualiser graphiquement la demande de traitement d'un patient averse au risque en fonction de la probabilité que le traitement soit bénéfique.

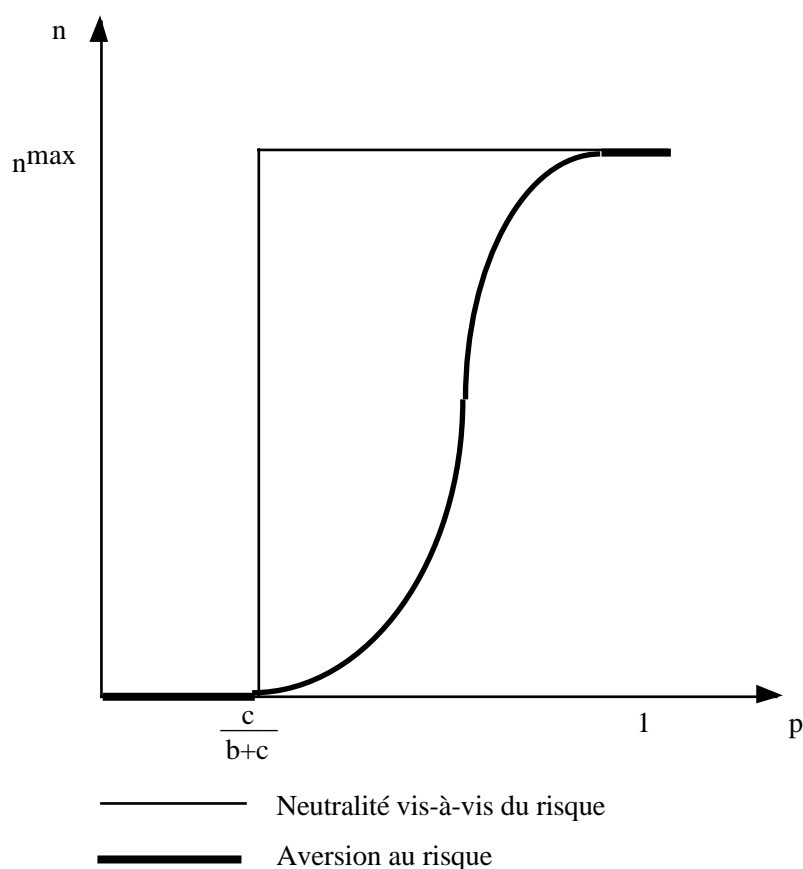


Figure 1

On peut constater que la demande du patient neutre vis-à-vis du risque est, en fonction de la valeur de  $p$  par rapport au seuil  $\frac{c}{b+c}$ , soit nulle soit



totale. Le traitement étant une activité génératrice de risque, la demande de soin du patient neutre vis-à-vis du risque est, pour toute valeur de  $p$ , supérieure ou égale à celle de l'individu manifestant de l'aversion au risque. Ce dernier a recours au soins dès que la probabilité que l'intervention soit bénéfique est supérieure au seuil. Cette demande croît ensuite de manière continue avec une probabilité de réussite de l'intervention qui augmente et elle atteint son point maximal ( $n = 1$ ) pour une valeur de  $p$  inférieure à l'unité. Les caractéristiques de cette fonction sont discutées à l'appendice A.

On peut faire ici le lien avec l'article de Eeckhoudt, Lebrun et Saily (1985) qui complètent l'analyse de Pauker et Kassirer (1975) sur les risques diagnostiques en y intégrant l'aversion au risque et en supposant que les patients ne font pas face à un choix binaire (traiter/ne pas traiter) mais peuvent sélectionner une intensité de traitement.

Dans le modèle de Eeckhoudt, Lebrun et Saily (1985), le patient averse au risque décide de recourir au traitement pour une probabilité de présence de la maladie inférieure au seuil  $p = \frac{c}{b+c}$ . Son intensité de traitement est ensuite croissante et continue avec la probabilité de maladie pour atteindre son niveau maximal pour une probabilité de maladie toujours inférieure au seuil  $p = \frac{c}{b+c}$ . On constate une similitude entre la demande de traitement en présence de risque diagnostique et thérapeutique. On remarque aussi que si la première est croissante pour des probabilités de maladie inférieure au seuil  $p = \frac{c}{b+c}$ , la seconde présente les mêmes caractéristiques mais pour des valeurs de probabilités de réussite du traitement supérieures à ce même seuil. Ce résultat est tout à fait intuitif si l'on se souvient que le traitement réduit le risque en cas de risque diagnostique mais qu'il l'augmente en cas de risque thérapeutique.

## 4 Variation certaine de la durée de vie

Examinons la modification dans l'intensité de traitement  $n$  lorsque la durée de vie  $T$  du patient varie. Nous allons dans un premier temps considérer que cette variation est certaine. L'équation 7 ci-dessous, obtenue en différentiant l'équation 3 par rapport à  $T$ , nous permet d'observer la variation de la demande de traitement suite à une variation de  $T$ .

$$\frac{\delta n}{\delta T} = \frac{-1}{S} [p \cdot b \cdot U_{12}(nb, T) - c \cdot (1 - p) \cdot U_{12}(-nc, T)] \quad (7)$$

On peut, via quelques transformations mettre en évidence la relation entre cette variation de l'intensité de traitement et l'évolution de l'aversion au risque de santé avec la durée de vie. En effet, l'équation 7 nous indique que :

$$[p.b.U_{12}(nb, T) - c.(1-p).U_{12}(-nc, T)] \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{\delta n}{\delta T} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad (8)$$

Nous savons, en utilisant l'équation 3 que :

$$\frac{c.(1-p)}{p.b} = \frac{U_1(nb, T)}{U_1(-nc, T)}$$

Par conséquent, nous pouvons réécrire la condition 8 de la manière suivante:

$$\frac{U_{12}(nb, T)}{U_1(nb, T)} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{U_{12}(-nc, T)}{U_1(-nc, T)} \Rightarrow \frac{\delta(\frac{U_{12}}{U_1})}{\delta H} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{U_{121}.U_1 - U_{11}.U_{12}}{(U_1)^2} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{\delta n}{\delta T} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

En utilisant le théorème de Young ( $U_{121} = U_{112}$ ), on peut écrire :

$$\frac{U_{112}.U_1 - U_{11}.U_{12}}{(U_1)^2} = \frac{-\delta(\frac{-U_{11}}{U_1})}{\delta T} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{\delta n}{\delta T} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad (9)$$

Ou, dit autrement:

$$\frac{\delta(\frac{-U_{11}}{U_1})}{\delta T} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{\delta n}{\delta T} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0 \quad (10)$$

Nous avons ainsi mis en évidence le rôle de l'évolution de l'aversion au risque de santé ( $-\frac{U_{11}}{U_1}$ ) par rapport à la durée de vie dans la variation de l'intensité de traitement sélectionnée à l'équilibre lorsque la durée de vie augmente. Des études empiriques sur l'évolution de l'aversion au risque de santé n'ont, à notre connaissance, pas encore été menées à ce jour. A priori, il peut cependant sembler raisonnable de penser qu'un patient devient de plus en plus averse au risque de santé à mesure que sa durée de vie augmente. En effet, ce patient manifestant de l'aversion pour le risque de santé craint les grandes différences d'états de santé possibles. Plus il vit longtemps, plus

il doit supporter la possibilité d'être dans un état de santé déforcé à cause des effets potentiellement préjudiciables du traitement. Ce qui tendrait à montrer que l'intensité de traitement se réduit avec la durée de vie certaine  $T$ .

#### 4.1 Variation de la durée de vie dans le modèle QALY

Nous étudions dans cette section les effets d'une variation de la durée de vie sur l'intensité de traitement sélectionnée par le patient dans le cadre du modèle QALY<sup>5</sup>. Dans le modèle QALY, l'utilité du patient dépend de son état de santé et du nombre d'année qui lui reste à vivre. On peut donc écrire sa fonction d'utilité comme suit<sup>6</sup>:

$$U(H, T) = V(H).W(T)$$

où  $V$  et  $W$  sont les fonctions d'utilité par rapport à l'état de santé et la durée de vie respectivement (voir Pliskin et al. 1980 et Miyamoto et Eraker 1988). Les dérivées premières, secondes et croisées s'écrivent donc:  $U_1(H, T) = V'(H).W(T)$ ;  $U_{11}(H, T) = V''(H).W(T)$ ;  $U_{12}(H, T) = V'(H).W'(T)$  et  $U_{112}(H, T) = V''(H).W'(T)$ . De sorte que l'équation 9 se réécrit:

$$\frac{-\delta(\frac{U_{11}}{U_1})}{\delta T} = \frac{V''(H).W'(T).V'(H).W(T) - V''(H).W(T).V'(H).W'(T)}{(V'(H).W(T))^2} = 0 \quad (11)$$

Nous concluons de l'équation 11 qu'une variation de la durée de vie ne modifie pas l'intensité de traitement d'équilibre ( $\frac{dn}{dT} = 0$ ) dans le modèle QALY. Ce résultat pourrait sembler contre-intuitif dans la mesure où le modèle QALY intègre le nombre d'années dans un état de santé particulier. Ce qui est cependant crucial ici, c'est la manière dont le nombre d'années

---

<sup>5</sup>Le modèle "Quality Adjusted Life Years" est la mesure de l'état de santé la plus répandue dans les modèles de prises de décisions médicales. Elle permet de classifier les interventions médicales en intégrant à la fois à leurs effets sur l'état de santé du patient (ou sa qualité de vie) et sur le nombre d'années durant lesquelles les patients pourront profiter de cette qualité de vie.

<sup>6</sup>Le modèle QALY exposé ici est le modèle général. Notons qu'un cas particulier de ce modèle, le modèle QALY linéaire qui présume que  $W(T)$  est linéaire, est aussi répandu en économie de la santé

modifie l'aversion au risque de santé du patient. Or, dans le modèle QALY, l'attitude du patient vis-à-vis des risques de santé est indépendante des variations de la durée de vie, ce qui explique que ces variations ne modifient pas l'intensité du traitement.

## 5 Décision de traitement avec durée de vie aléatoire

Nous avons analysé à la section précédente les modifications dans l'intensité de traitement du patient suite à une variation certaine de sa durée de vie. En réalité, nul ne peut prédire avec certitude le nombre d'années qu'il lui reste à vivre. D'où l'intérêt de traiter la durée de vie  $T$  du patient comme une variable aléatoire et d'étudier comment cette modification dans la construction du modèle affecte l'intensité de traitement à l'équilibre. C'est l'objectif des deux sections suivantes.

Nous supposons que, contrairement à l'état de santé que le patient peut modifier à travers son choix d'intensité de traitement, la durée de vie est une variable exogène. Nous faisons donc implicitement l'hypothèse que le traitement, qu'il soit bénéfique ou préjudiciable à la santé de l'individu, n'a pas d'impact sur sa durée de vie<sup>7</sup>. Pour faciliter la présentation et sans perte de généralité, nous traitons la durée de vie comme une variable discrète. Soit l'individu vit longtemps ( $T_1$  années), soit il vit moins longtemps ( $T_2$  années), avec évidemment  $T_1 > T_2$ . La probabilité qu'il vive  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) années est de  $\pi$  (resp.  $1 - \pi$ ).

Le problème de maximisation du patient s'écrit désormais:

$$\begin{aligned} \text{Max}_n EU &= p.[\pi.U(nb, T_1) + (1 - \pi).U(nb, T_2)] + \\ &\quad (1 - p).[ \pi.U(-nc, T_1) + (1 - \pi).U(-nc, T_2)] \end{aligned} \quad (12)$$

L'équation 13 donne la condition de premier ordre associée à ce problème de maximisation:

$$\begin{aligned} \frac{\delta EU}{\delta n} &= p.b.[\pi.U_1(nb, T_1) + (1 - \pi).U_1(nb, T_2)] - \\ &\quad (1 - p).c.[\pi.U_1(-nc, T_1) + (1 - \pi).U_1(-nc, T_2)] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

---

<sup>7</sup>Les traitements de confort correspondent par exemple à cette situation.

Cette condition de premier ordre nous assure simplement qu'à l'équilibre, le bénéfice marginal attendu d'une unité de traitement est égal à son coût marginal attendu.

La condition de second ordre associée à ce problème s'écrit comme suit:

$$\frac{\delta^2 EU}{\delta n^2} = D = p.b^2.[\pi.U_{11}(nb, T_1) + (1 - \pi).U_{11}(nb, T_2)] + (1 - p).c^2.[\pi.U_{11}(-nc, T_1) + (1 - \pi).U_{11}(-nc, T_2)] < 0$$

La concavité de la fonction d'utilité par rapport à l'état de santé ( $U_{11} < 0$ ) nous assure que le signe de cette condition de second ordre est négatif et que la solution du problème est bien un maximum.

Analysons à présent comment et sous quelles conditions l'introduction du risque incontrôlable portant sur la durée de vie modifie la décision de traitement du patient. Si on suppose que:

$$LE = \pi.T_1 + (1 - \pi).T_2 \quad (14)$$

On peut réécrire l'équation 13 comme suit :

$$p.b.U_1(nb, LE - \rho_{LE}(nb)) - (1 - p).c.U_1(-nc, LE - \rho_{LE}(-nc)) = 0 \quad (15)$$

L'interprétation du paramètre  $\rho_{LE}$  n'est pas directe. Elle présente des similarités avec le concept de prime de risque développé simultanément par Pratt (1964) et Arrow (1965) et avec celui de prime de prudence introduit par Kimball (1990). Nous rappelons ces deux notions et donnons une interprétation économique du paramètre  $\rho_{LE}$  à l'appendice B.

Nous allons dénoter  $n^*$  et  $n^{**}$  les intensités de traitement respectivement en l'absence et en présence du risque exogène de durée. L'effet sur l'intensité de traitement de l'introduction du risque exogène de durée dépend du signe de l'équation 16 ci-dessous.

$$p.b.U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b)) - (1 - p).c.U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(-n^*c)) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad (16)$$

Si le signe de l'équation 16 est positif, une intensité de traitement  $n^*$  en présence d'un risque exogène de durée indique que le bénéfice marginal attendu du traitement est supérieur à son coût marginal attendu, impliquant qu'il convient d'intensifier le traitement pour atteindre l'équilibre. En résumé, l'introduction du risque exogène de durée accroît (resp. ne modifie pas; resp. réduit) le traitement si l'équation 16 est positive (resp. nulle; resp. négative).

De par l'équation 3, nous déduisons que:

$$\frac{c.(1-p)}{p.b} = \frac{U_1(nb, LE)}{U_1(-nc, LE)}$$

Par conséquent, nous pouvons dire que:

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(-n^*c))}{U_1(-n^*c, LE)} \Rightarrow n^{**} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} n^* \quad (17)$$

Nous allons résoudre le problème en le scindant en quatre cas distincts basés sur les propriétés du paramètre  $\rho_{LE}$ . En effet l'évolution de  $\rho_{LE}$  en fonction de l'état de santé de l'individu dépend de la dérivée quatrième de la fonction d'utilité (voir appendice B) et plus précisément du signe de  $U_{1122}$  qui est difficile à préciser a priori. Nous allons donc successivement considérer toutes les possibilités.

Dans les analyses des cas 3 et 4, nous allons supposer que  $U_{12} > 0$ , indiquant que la santé et la durée de vie sont complémentaires. Il nous semble en effet raisonnable de supposer que l'utilité marginale d'une amélioration de l'état de santé est croissante avec la durée de vie de l'individu. C'est spécialement vrai pour des durées proches de zéro. Il semble évident qu'un patient considère deux états de santé différents comme étant équivalents si sa durée de vie est nulle. A mesure que sa durée de vie augmente, il peut bénéficier plus longtemps d'améliorations éventuelles de son état de santé ce qui justifierait que  $U_{12} > 0$ .

**Cas 1** :  $\rho_{LE} = 0$

L'introduction du risque exogène de durée n'a aucun impact sur l'utilité marginale d'une amélioration de l'état de santé. Par conséquent, les équations 3 et 13 se confondent et l'ajout du risque exogène ne modifie pas l'intensité du traitement à l'équilibre ( $n^* = n^{**}$ ).

**Cas 2** :  $\rho_{LE}(n^*b) = \rho_{LE}(-n^*c) \neq 0$

L'introduction du risque exogène de durée modifie l'utilité marginale d'une amélioration de l'état de santé mais cette modification est indépendante de l'état de santé dans lequel se trouve le patient. Ce cas est dérivé formellement à l'appendice C. La variation de l'intensité de traitement suite à la prise en compte du risque exogène dépend de l'évolution de l'aversion au risque de santé avec la durée de vie. Plus précisément, si l'aversion au risque de santé du patient croît (resp. ne dépend pas; resp. décroît) avec la durée de vie, alors le risque exogène de durée augmente (resp. ne modifie pas; resp. réduit) l'intensité du traitement à l'équilibre.

**Cas 3** :  $\rho_{LE}(n^*b) < \rho_{LE}(-n^*c)$ ;  $\rho_{LE}$  croît avec l'état de santé

Le cas analysé est celui d'une introduction de risque exogène de durée modifiant l'utilité marginale d'une amélioration de l'état de santé, et ce de façon de plus en plus marquée au fur et à mesure que l'état de santé du patient s'améliore. Nous montrons à l'appendice D que l'introduction du risque exogène mène à une intensification du traitement si l'aversion au risque de santé croît ou est constante avec la durée de vie de l'individu. L'effet sur le traitement est par contre ambigu si l'aversion au risque est décroissante avec l'état de santé.

**Cas 4** :  $\rho_{LE}(n^*b) > \rho_{LE}(-n^*c)$ ;  $\rho_{LE}$  décroît avec l'état de santé

Nous discutons ici le cas où l'introduction du risque exogène de durée modifie l'utilité marginale d'une amélioration de l'état de santé mais de plus en plus faiblement au fur et à mesure que l'état de santé du patient s'améliore. Nous montrons à l'appendice E que dans ce cas, l'introduction du risque exogène réduit l'intensité du traitement si l'aversion au risque de santé décroît ou est constante avec la durée de vie de l'individu. L'effet sur le traitement est par contre ambigu si l'aversion au risque est croissante avec l'état de santé du patient.

## 5.1 Introduction du risque exogène de durée dans le modèle QALY

Comme nous l'avons fait lors de la section précédente, nous analysons l'impact de l'introduction du risque exogène de durée dans le modèle QALY. Nous savons depuis la section 4.1. que dans le cadre du modèle QALY général où  $U(H, T) = V(H).W(T)$ , l'aversion au risque de santé est constante avec la durée de vie. Comme  $U_{1122} = V''(H).W''(T)$ , nous constatons, en utilisant

les équations 24 et 25 de l'appendice A, que:

$$\rho(LE) = -\frac{W''(T)}{W'(T)} \cdot \frac{\sigma_\epsilon^2}{2}$$

Par conséquent:

$$\frac{\delta\rho(LE)}{\delta H} = 0$$

Le modèle QALY généralisé correspond donc au cas 2 analysé ci-dessus avec  $\rho_{LE}(n^*b) = \rho_{LE}(n^*b) \neq 0$ . Nous avons vu que dans ce cas, une aversion au risque de santé constante avec la durée de vie n'implique pas de modification du traitement sélectionné à l'équilibre suite à l'introduction du risque exogène de durée. Nous en concluons que le risque de durée de vie n'affecte pas la décision de traitement du patient dans le modèle QALY généralisé.

## 6 Modifications du risque exogène de durée

Nous examinons dans cette section l'impact de diverses modifications du risque exogène de durée sur la sélection de l'intensité de traitement à l'équilibre.

### 6.1 Variation de la distribution du risque

Nous considérons dans un premier temps une modification de la probabilité  $\pi$  en supposant que  $T_1$  et  $T_2$  sont inchangés. Notons qu'une augmentation de  $\pi$  correspond à une amélioration de la situation de l'individu via une augmentation de son espérance de vie, et donc à une amélioration de son espérance d'utilité au sens de la dominance stochastique de premier ordre.

Nous montrons à l'appendice F que le signe de l'équation 26 dépend de l'évolution de l'aversion au risque de santé avec la durée de vie. Si cette aversion augmente (resp. ne varie pas; resp. diminue) à mesure que la durée de vie augmente, le patient décide de réduire (resp. ne pas modifier; resp. accroître) l'intensité de son traitement. L'interprétation de ce résultat est directe. Lorsque  $\pi$  augmente, l'espérance de vie de l'individu augmente. Si son aversion au risque de santé augmente avec une plus grande espérance de vie, il décidera de réduire l'intensité de son traitement dans la mesure où celui-ci présente des risques.



## 6.2 Variation du nombre d'années de vie

Ici encore, nous traitons des effets sur l'intensité de traitement à l'équilibre d'une amélioration de l'espérance de vie mais à travers une augmentation de  $T_1$  avec  $T_2$  et  $\pi$  constants. Nous montrons à l'appendice G qu'une fois encore l'évolution du choix du traitement du patient dépend de l'évolution de son aversion au risque de santé avec sa durée de vie. Plus précisément, le patient décidera de réduire (resp. ne pas modifier; resp. accroître) l'intensité de son traitement si cette aversion augmente (resp. ne varie pas; resp. diminue) à mesure que la durée de vie augmente. L'interprétation de ce résultat est en tout point similaire à celle développée à la section 6.1 car une augmentation de  $T_1$ , tout comme une augmentation de  $\pi$ , améliore l'espérance de vie de l'individu

Une augmentation de  $T_2$ , tout comme une augmentation de  $T_1$ , a un effet positif sur l'espérance d'utilité. Mais contrairement à l'augmentation de  $T_1$  qui accroît la variance du résultat, l'augmentation de  $T_2$  la réduit. C'est pour cette raison que l'on ne peut tirer, pour les effets sur le traitement à l'équilibre suite à une augmentation de  $T_2$ , les mêmes conclusions que pour les effets d'une l'augmentation de  $T_1$ . Nous montrons à l'appendice H que l'effet sur  $n$  de l'augmentation de  $T_2$  est ambigu.

## 6.3 Variation du risque exogène préservant la moyenne

Les sections 6.1. et 6.2. ont été consacrées à l'analyse de l'impact sur l'intensité de traitement de variations de  $\pi$ ,  $T_1$  et  $T_2$ . Si, comme ce fut le cas lors des deux sous-sections précédentes, ces modifications sont considérées séparément, elles conduisent à une variation de l'espérance du risque de durée de vie dans la mesure où une l'augmentation (resp. diminution) de  $\pi$  et de  $T_1$  conduisent à une amélioration (resp. détérioration) de la situation du patient et donc à une nouvelle situation qui domine (resp. est dominée par) l'ancienne au sens de la dominance stochastique de premier ordre. Nous étudions dans cette dernière section des changements simultanés de ces différentes variables en imposant des variations de  $\pi$ ,  $T_1$  et  $T_2$  préservant l'espérance de vie constante. Notons que nous avons étudié un cas particulier d'une dispersion du risque préservant la moyenne lorsque nous sommes passé d'une situation sans risque exogène de durée (section 4) à une situation en présence d'un risque exogène de durée (section 5) sans modifications de l'espérance de vie via l'équation 14. Nous généralisons ici l'idée en étudiant l'effet d'une aug-

mentation du risque de durée de vie. Nous analysons à l'appendice I le cas de variations de  $\pi$  et de  $T_1$  préservant l'espérance de vie constante. Les deux sous-sections précédentes nous ayant montré qu'une augmentation de  $\pi$  ou de  $T_1$  conduisaient à une intensification du traitement sous les mêmes conditions (aversion au risque de santé croissante ou constante avec la durée de vie), il n'est pas surprenant de constater que ces conditions ne sont plus suffisantes pour évaluer l'impact d'une modification du risque préservant la moyenne sur l'intensité de traitement. Nous montrons à l'appendice H que la variation du risque préservant la moyenne conduit bien à des conclusions incertaines compte tenu des hypothèses faites et qu'il faut donc introduire des hypothèses supplémentaires (portant notamment sur les dérivées quatrièmes de la fonction d'utilité) pour obtenir des résultats non-ambigus.

## 7 Conclusion

Patients et médecins sont confrontés quotidiennement à des décisions médicales difficiles car traiter un cas (ou ne pas le traiter) peut comporter des risques. L'objectif de ce travail est participer au développement de l'approche systématique de la décision médicale en incertitude.

Pour ce faire, nous avons développé un modèle simple où un médecin et un patient atteint d'une maladie doivent prendre une décision portant sur l'intensité d'un traitement ayant des effets sur la qualité de vie mais qui comportent des risques thérapeutiques. Nous nous focalisons plus particulièrement sur l'importance que prend dans cette décision la durée de vie du patient. Nous montrons que le déterminant principal de l'impact d'un changement dans la durée de vie du patient, qu'elle soit considérée comme certaine ou incertaine, est la manière dont évolue l'aversion au risque de santé avec la durée de vie. Bien qu'aucune recherche empirique sur la question n'ait été entreprise à ce jour, il nous a semblé plausible de supposer que le patient manifeste plus d'aversion au risque de santé quand il lui reste beaucoup d'années à vivre dans la mesure où il doit, dans ce cas, supporter pendant plus longtemps les éventuelles conséquences préjudiciables du traitement. Nous montrons alors que si l'espérance de vie est constante, l'impact du risque exogène de durée à des effets ambigus sur l'intensité de traitement sélectionnée à l'équilibre. Par contre, une amélioration de cette espérance de vie conduira à une intensification du traitement à l'équilibre. Cela signifierait donc qu'une personne de 20 ans, en situation d'incertitude sur sa durée de

vie mais qui peut quand même espérer mourir après une personne de 60 ans, sélectionnera un traitement plus intensif.

Une autre conclusion importante de l'article est que le risque exogène de durée n'a pas d'impact sur la décision de traitement dans le cadre du modèle QALY. Ce résultat peut-être utilisé pour tester la validité prédictive de ce modèle très répandu en économie de la santé. En effet, si on observe que des patients confrontés au risque exogène de durée modifient leurs décisions de traitement, on peut en conclure que le modèle QALY n'est pas un bon indicateur du comportement de ces patients.

## References

- [1] **Arrow**, K. (1965), "Aspects of the Theory of Risk-Bearing", Helsinki. Yrjö Jahansson Foundation.
- [2] **Doherty**, N. and H. **Schlesinger** (1983), "Optimal Insurance in Incomplete Markets", *Journal of Political Economy*, 91, 1045-1054.
- [3] **Doubilet**, P. (1983), "A Mathematical Approach to Interpretation and Selection of Diagnostic Tests", *Medical Decision Making*, 3, 177-195.
- [4] **Eeckhoudt**, L., C. **Gollier** and H.**Schlesinger** (1996), "Changes in Background Risk and Risk Taking Behavior", *Econometrica*, 64, 683-689.
- [5] **Eeckhoudt**, L., T. **Lebrun** and J.C.**Sailly** (1985), "Risk-Aversion and Physicians' Medical Decision Making", *Journal of Health Economics*, 4, 273-281.
- [6] **Eeckhoudt**, L. and M. **Kimball** (1990), "Background Risk, Prudence, and the Demand for Insurance", in Dionne G. (ed.), Contributions to Insurance Economics, Kluwer Academic Publishers.
- [7] **Fryback**, D. and W. **Lawrence** (1997), "Dollars May not Buy as Many QALYS as we Think", *Medical Decision Making*, 17, 276-284.
- [8] **Harris**, R. and R. **Nease** (1997), "The Importance of Patient Preferences for Comorbidities in Cost Effectiveness Analyses", *Journal of Health Economics*, 16, 113-120.
- [9] **Kimball**, M. (1990), "Precautionary Saving in the Small and in the Large", *Econometrica*, 58, 53-73.
- [10] **Miyamoto**, J.M. and S.A. **Eraker** (1988), "A Multiplicative Model of the Utility of Survival Duration and Health Quality", *Journal of Experimental Psychology*, 117, 3-20.
- [11] **Pauker**, S.G. and J.P. **Kassirer** (1975), "Therapeutic Decision Making: a Cost-Benefit Analysis", *New England Journal of Medicine*, 293, 229-234.

- [12] **Pauker**, S.G. et J.P. **Kassirer** (1980), "The treshold approach to clinical decision making", *New England Journal of Medicine*, 302, 1109-1117.
- [13] **Pliskin**, J.S., D.S. **Shepard** and M.C. **Weinstein** (1980), "Utility Functions for Life Years and Health Status", *Operations Research*, 28, 206-223.
- [14] **Pratt**, M. (1964), "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, 32, 122-136.

## A Décision de traitement sans risque de durée de vie

En reprenant l'équation 3 et en utilisant le théorème de fonctions implicites, on peut définir la variation de la demande de traitement ( $n$ ) en fonction de la probabilité que le traitement soit bénéfique ( $p$ ) comme suit:

$$\frac{\delta p}{\delta n} = \frac{-\frac{\delta G}{\delta p}}{\frac{\delta G}{\delta n}} = \frac{-b.U_1(nb, T) - c.U_1(-nc, T)}{p.b^2.U_{11}(nb, T) + c^2.(1-p).U_{11}(-nc, T)} > 0 \quad (18)$$

L'hypothèse d'aversion au risque de santé impliquant une utilité marginale positive ( $U_1 > 0$ ) et décroissante ( $U_{11} < 0$ ) nous permet d'affirmer que le signe de l'équation 18 est toujours positif, indiquant par là une demande de traitement qui augmente toujours avec  $n$ . Au vu des hypothèses du modèle, le numérateur de l'expression 18 n'est jamais infini et son dénominateur n'est jamais nul. On peut donc en conclure que la fonction liant  $n$  à  $p$  est dérivable partout sur son domaine de définition et que, par conséquent, elle croît de manière continue.

En reprenant l'équation 3, on peut exprimer  $p$  en fonction de  $n$  de la manière suivante:

$$p = \frac{c.U_1(-nc, T)}{b.U_1(nb, T) + c.U_1(-nc, T)} \quad (19)$$

On constate, grâce à cette dernière égalité, que  $p = \frac{c}{b+c}$  pour  $n = 0$ . Combiné avec le fait que  $n$  est strictement croissant avec  $p$ , cela nous permet d'affirmer que la fonction est croissante à partir de  $p = \frac{c}{b+c}$ . La même équation 19 nous montre aussi  $p < 1$  pour toute valeur de  $n$ , indiquant que la demande de traitement atteint son niveau maximal pour des valeurs de probabilités inférieures à l'unité.

## B Interprétation du paramètre $\rho_{LE}$

Reprenons dans un premier temps les résultats de Pratt (1964) et Arrow (1965) et ceux de Kimball (1990) concernant respectivement la prime de risque et la prime de prudence.

Si l'on considère un agent possédant un revenu sûr  $x$  et une loterie  $\tilde{y}$ , on peut définir sa prime de risque  $\pi$  grâce à la relation suivante :

$$U(x - \pi(\tilde{y}, x)) = E[U(x + \tilde{y})] \quad (20)$$

En utilisant une approximation de second-ordre de Taylor, Pratt (1964) et Arrow (1965) ont montré que  $\pi$  est approximativement égal à  $(-\frac{U''}{U'} \cdot \frac{\sigma^2}{2})$  où  $\sigma^2$  est la variance de la loterie et  $-\frac{U''}{U'}$  le degré d'aversion absolue au risque. Ce degré d'aversion absolue quantifie le rejet du risque par l'individu et indique, via la prime de risque  $\pi$ , le revenu sûr auquel il est prêt à renoncer pour se débarrasser de ce risque.

Kimball (1990) définit la prime de précaution  $\psi$  par la relation suivante:

$$U'(x - \psi(\tilde{y}, x)) = E[U'(x + \tilde{y})] \quad (21)$$

Avec  $\psi$  approximativement égal à  $-\frac{U'''}{U''} \cdot \frac{\sigma^2}{2}$  où  $-\frac{U'''}{U''}$  est le degré de prudence absolu de l'individu. Il indique la propension qu'à l'individu à se prémunir lorsqu'il fait face à des situations d'incertitude. Puisque l'équation 21 porte sur les utilités marginales et que les choix économiques se définissent à partir des valeurs marginales,  $\psi$  peut aussi être interprété comme la variation certaine du revenu qui à le même effet sur l'utilité marginale que l'introduction de l'incertitude et qui donc conduit l'individu à effectuer les même choix que lorsque l'incertitude est introduite.

Nous pouvons constater en reprenant l'équation 15 que le paramètre  $\rho_{LE}$  ne correspond pas à la prime de risque  $\pi$  car cette prime de risque porte sur les utilités totales et non marginales. De même elle ne correspond pas à la prime de précaution  $\psi$  dans la mesure où l'équation 15 comprend une fonction d'utilité à deux arguments et que  $\rho_{LE}$  donne la variation de la durée de vie qui ne modifie pas l'utilité marginale de l'état de santé alors que  $\psi$  donne la variation du revenu qui ne modifie pas l'utilité marginale du revenu. On peut donc interpréter  $\rho_{LE}$  comme une prime de précaution croisée.

Nous pouvons maintenant préciser formellement ce paramètre  $\rho_{LE}$ . Soit  $\tilde{\epsilon}$  une variable aléatoire de moyenne zéro et de variance  $\sigma_{\tilde{\epsilon}}^2$ . On peut dans ce cas définir  $\rho_{LE}$  comme suit:

$$E(U_1(H, T + \tilde{\epsilon})) = U_1(H, T - \rho_{LE}) \quad (22)$$

En évaluant les deux côtés du signe d'égalité de l'équation 22 par une approximation de Taylor, nous obtenons:

$$E[U_1(H, T) + \tilde{\epsilon}.U_{12}(H, T) + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}.U_{122}(H, T)] = U_1(H, T) - \rho_{LE}.U_{12}(H, T) \quad (23)$$

Comme  $E(\tilde{\epsilon}) = 0$ , nous pouvons, après certains réarrangements, écrire l'équation 23 de la façon suivante:

$$\rho_{LE} = -\frac{U_{122}(H, T)}{U_{12}(nb, T)} \cdot \frac{\sigma_{\tilde{\epsilon}}^2}{2} \quad (24)$$

Les effets de modifications de l'état de santé sur la prime de précaution croisée  $\rho_{LE}$  sont déterminés par le signe du terme ci-dessous obtenu en dérivant  $\rho_{LE}$  comme défini par l'équation 24 par rapport à l'état de santé H, ce qui donne:

$$\frac{\delta\rho_{LE}}{\delta H} = \frac{U_{1122}.U_{12} - U_{112}.U_{122}}{(U_{12})^2} \quad (25)$$

Il faut donc définir le signe de la dérivé quatrième de la fonction d'utilité pour évaluer la variation de  $\rho_{LE}$  suite à des modifications de l'état de santé.



## C Dérivation du cas 2

Définissons le signe de l'inéquation 17 lorsque  $\rho_{LE}(n^*b) = \rho_{LE}(-n^*c) \neq 0$ .

Si nous supposons que  $\rho_{LE}(n^*b) = \rho_{LE}(-n^*c) = z$ , nous pouvons réécrire l'inégalité 17 comme suit :

$$\frac{\delta \frac{U_1(H, T-z)}{U_1(H, T)}}{\delta H} = \frac{U_{11}(H, T-z) \cdot U_1(H, T) - U_1(H, T-z) \cdot U_{11}(H, T)}{(U_1(H, T))^2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \Rightarrow \frac{\delta n}{\delta T} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

Le signe de cette condition dépend du signe de :

$$\frac{U_{11}(H, T-z)}{U_1(H, T-z)} - \frac{U_{11}(H, T)}{U_1(H, T)} = \frac{\delta \frac{U_{11}(H, T-z)}{U_1(H, T)}}{\delta T}$$

Le signe de l'équation 17 dépend donc de l'évolution l'aversion au risque de santé avec la durée de vie du patient. On peut résumer les choses comme suit :

- Si l'aversion au risque de santé augmente avec la durée de vie, la demande de traitement s'intensifie avec l'introduction du risque exogène de durée ( $n^* < n^{**}$ );
- Si l'aversion au risque de santé est indépendante de la durée de vie, la demande de traitement ne se modifie pas avec l'introduction du risque exogène de durée ( $n^* = n^{**}$ );
- Si l'aversion au risque de santé diminue avec la durée de vie, la demande de traitement se réduit avec l'introduction du risque exogène de durée ( $n^* > n^{**}$ ).

## D Dérivation du cas 3

Nous recherchons le signe de l'équation 17 lorsque  $\rho_{LE}(n^*b) < \rho_{LE}(-n^*c)$ . Nous tirons de l'appendice B que lorsque l'aversion au risque de santé croît ou est constante avec la durée de vie:

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} \geq \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(-n^*c, LE)}$$

Comme  $\rho_{LE}(n^*b) < \rho_{LE}(-n^*c)$  et que  $U_{12} > 0$  nous en concluons que l'introduction du risque exogène de durée augmente l'intensité de traitement car dans ces deux cas:

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} > \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(-n^*c))}{U_1(-n^*c, LE)}$$

Par contre, l'effet est ambigu lorsque l'aversion au risque de santé décroît avec la durée de vie car dans ce cas, nous savons de l'appendice B que :

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} < \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(-n^*c, LE)}$$

Mais comme  $U_{12} > 0$  et que  $\rho_{LE}(n^*b) < \rho_{LE}(-n^*c)$ , remplacer  $\rho_{LE}(n^*b)$  par  $\rho_{LE}(-n^*c)$  du côté droit du signe d'inégalité aura pour effet de réduire ce terme, de sorte que sa comparaison avec le côté gauche du signe d'inégalité requière des hypothèses supplémentaires. Nous en concluons donc que, compte tenu des hypothèses faites dans ce modèle, l'effet de l'introduction du risque exogène de durée est ambigu sur l'intensité de traitement lorsque l'aversion au risque de santé décroît car dans ce cas:

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(-n^*c))}{U_1(-n^*c, LE)}$$

## E Dérivation du cas 4

Nous utilisons ici la même technique que pour l'appendice C pour rechercher le signe de l'équation 17 lorsque  $\rho_{LE}(n^*b) > \rho_{LE}(-n^*c)$ . Nous tirons de l'appendice B que lorsque l'aversion au risque de santé décroît ou est constante avec la durée de vie:

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} \leq \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(-n^*c, LE)}$$

Comme  $\rho_{LE}(n^*b) > \rho_{LE}(-n^*c)$  et que  $U_{12} > 0$ , l'introduction du risque exogène de durée augmente l'intensité de traitement car dans ces deux cas, le remplacement de  $\rho_{LE}(n^*b)$  par  $\rho_{LE}(-n^*c)$  du côté droit du signe d'inégalité à pour effet d'augmenter ce terme, ce qui nous permet d'affirmer que:

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} < \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(-n^*c))}{U_1(-n^*c, LE)}$$

Par contre, l'effet est ambigu lorsque l'aversion au risque de santé croît avec la durée de vie car dans ce cas, nous savons de l'appendice B que:

$$\frac{U_1(n^*b, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(n^*b, LE)} > \frac{U_1(-n^*c, LE - \rho_{LE}(n^*b))}{U_1(-n^*c, LE)}$$

Le remplacement de  $\rho_{LE}(n^*b)$  par  $\rho_{LE}(-n^*c)$  du côté droit du signe d'inégalité aura pour effet de renforcer ce terme lorsque  $U_{12} > 0$ , ce qui nous permet d'affirmer que l'introduction du risque exogène de durée à un effet ambigu sur l'intensité de traitement lorsque l'aversion au risque de santé croît avec la durée de vie.

## F Dérivation du signe de $\frac{dn}{d\pi}$

La différentiation de l'équation 13 par rapport à  $\pi$  donne après quelques aménagements:

$$\frac{dn}{d\pi} = -\frac{1}{D} \cdot [p \cdot b(U_1(nb, T_1) - U_1(nb, T_2)) - (1-p) \cdot c(U_1(-nc, T_1) - U_1(-nc, T_2))] \quad (26)$$

D étant négatif, le signe de l'équation 26 dépend du signe de :

$$p \cdot b(U_1(nb, T_1) - U_1(nb, T_2)) - (1-p) \cdot c(U_1(-nc, T_1) - U_1(-nc, T_2))$$

Nous savons de l'équation 13 que:

$$\frac{c \cdot (1-p)}{p \cdot b} = \frac{\pi \cdot U_1(nb, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(nb, T_2)}{\pi \cdot U_1(-nc, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(-nc, T_2)}$$

Le signe de l'équation 26 dépend donc du signe de

$$\frac{U_1(nb, T_1) - U_1(nb, T_2)}{\pi \cdot U_1(nb, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(nb, T_2)} - \frac{U_1(-nc, T_1) - U_1(-nc, T_2)}{\pi \cdot U_1(-nc, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(-nc, T_2)}$$

On peut en conclure que:

$$\frac{\delta \frac{U_1(H, T_1) - U_1(H, T_2)}{\pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2)}}{\delta H} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{dn}{d\pi} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

Le signe de l'équation 26 dépend donc du signe du numérateur de l'expression suivante:

$$\frac{(U_{11}(H, T_1) - U_{11}(H, T_2)) \cdot B - A \cdot (\pi \cdot U_{11}(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_{11}(H, T_2))}{(\pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2))^2}$$

Avec  $A = U_1(H, T_1) - U_1(H, T_2)$  et  $B = \pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2)$ .

Après quelques aménagements, on réalise que le signe de ce numérateur équivaut au signe de:

$$U_1(H, T_2) \cdot U_{11}(H, T_1) - U_1(H, T_1) \cdot U_{11}(H, T_2)$$

Et que donc:

$$\frac{-U_{11}(H, T_1)}{U_1(H, T_1)} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{-U_{11}(H, T_1)}{U_1(H, T_1)} \Rightarrow \frac{dn}{d\pi} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

Le signe de  $\frac{dn}{d\pi}$  dépend donc totalement de l'évolution de l'aversion au risque de santé avec la durée de vie.

## G Dérivation du signe de $\frac{dn}{dT_1}$

En différenciant l'équation 13 par rapport à  $T_1$  nous obtenons, après quelques réarrangements:

$$\frac{dn}{dT_1} = -\frac{1}{D} \cdot [p \cdot b(\pi \cdot U_{12}(nb, T_1)) - (1-p) \cdot c(\pi \cdot U_{12}(-nc, T_1))] \quad (27)$$

D étant négatif, le signe de l'équation 27 dépend du signe de:

$$p \cdot b(\pi \cdot U_{12}(nb, T_1)) - (1-p) \cdot c(\pi \cdot U_{12}(-nc, T_1))$$

Nous savons de l'équation 13 que :

$$\frac{c \cdot (1-p)}{p \cdot b} = \frac{\pi \cdot U_1(nb, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(nb, T_2)}{\pi \cdot U_1(-nc, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(-nc, T_2)}$$

Le signe de l'équation 27 dépend donc du signe de:

$$\frac{U_{12}(nb, T_1)}{\pi \cdot U_1(nb, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(nb, T_2)} - \frac{U_{12}(-nc, T_1)}{\pi \cdot U_1(-nc, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(-nc, T_2)}$$

Ce qui nous amène à affirmer que:

$$\frac{\delta\left(\frac{U_{12}(H, T_1)}{\pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2)}\right)}{\delta H} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{dn}{dT_1} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

On peut donc dire, après décomposition de cette dernière (in)égalité, que le signe de  $\frac{dn}{dT_1}$  dépend du signe du numérateur de l'expression suivante:

$$\frac{U_{112}(H, T_1) \cdot M - U_{12}(H, T_1) \cdot N}{(\pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2))^2} \quad (28)$$

Avec:

$$M = \pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2) > 0$$

et

$$N = \pi \cdot U_{11}(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_{11}(H, T_2) < 0$$

Après avoir effectué quelques aménagements, on peut écrire le numérateur du terme 28 comme suit:

$$\frac{dn}{dT_1} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \pi \cdot \underbrace{[U_{112}(H, T_1).U_1(H, T_1) - U_{12}(H, T_1).U_{11}(H, T_1)]}_A \quad (29)$$

$$+(1 - \pi) \cdot \underbrace{[U_{112}(H, T_1).U_1(H, T_2) - U_{12}(H, T_1).U_{11}(H, T_2)]}_B \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

Montrons que le signe de l'évolution de l'aversion au risque de santé par rapport à la durée de vie suffit à caractériser le signe de  $\frac{dn}{dT_1}$ .

Le terme A de l'expression 30 correspond à la négative de la dérivée de l'aversion au risque de santé par rapport à la durée de vie (voir équation 9). Il s'ensuit qu'une aversion au risque de santé croissante (resp. constante; resp. décroissante) avec le temps de vie conduit à un terme A négatif (resp. constant; resp. positif)

L'analyse du terme B de l'expression 30 requiert quelque étapes supplémentaires. Le cas le plus simple est celui de l'aversion au risque de santé constante avec la durée de vie. Montrons qu'elle conduit à un terme B nul. Pour que  $B = 0$ , il faut que:

$$U_{112}(H, T_1).U_1(H, T_2) - U_{12}(H, T_1).U_{11}(H, T_2) = 0$$

ou bien que:

$$\frac{U_{112}(H, T_1)}{U_{12}(H, T_1)} = \frac{U_{11}(H, T_2)}{U_1(H, T_2)}$$

Ou, en utilisant le théorème de Young:

$$\frac{U_{121}(H, T_1)}{U_{12}(H, T_1)} = \frac{U_{11}(H, T_2)}{U_1(H, T_2)} \quad (30)$$

Si l'aversion au risque de santé est constante avec le temps de vie, nous savons que:

$$U_{121}(H, T_1).U_1(H, T_1) - U_{11}(H, T_1).U_{12}(H, T_1) = 0 \Rightarrow \frac{U_{121}(H, T_1)}{U_{12}(H, T_1)} = \frac{U_{11}(H, T_1)}{U_1(H, T_1)}$$

et aussi que

$$\frac{U_{11}(H, T_1)}{U_1(H, T_1)} = \frac{U_{11}(H, T_2)}{U_1(H, T_2)}$$

Ces deux dernières égalités nous permettent de retrouver la condition 30 et ainsi de montrer que  $B$  est nul lorsque l'aversion au risque de santé est constante avec le temps de vie.

Puisque les termes  $A$  et  $B$  de l'équation 30 sont nuls lorsque l'aversion au risque de santé est constante avec le temps de vie, on peut en conclure dans ce cas que  $\frac{dn}{dT_1} = 0$ .

Analysons ce même terme  $B$  pour une aversion au risque de santé croissante avec la durée de vie et montrons que cette hypothèse conduit à  $B < 0$  et donc à une réduction du traitement suite à une augmentation de  $T_1$ . Il faut donc montrer que:

$$B = U_{112}(H, T_1).U_1(H, T_2) - U_{12}(H, T_1).U_{11}(H, T_2) < 0$$

ou que

$$-\frac{U_{112}(H, T_1)}{U_{12}(H, T_1)} > -\frac{U_{11}(H, T_2)}{U_1(H, T_2)} \quad (31)$$

Si l'aversion au risque de santé est croissante avec la durée de vie, on peut écrire:

$$U_{112}(H, T_1).U_1(H, T_1) - U_{12}(H, T_1).U_{11}(H, T_1) < 0$$

ou bien

$$-\frac{U_{112}(H, T_1)}{U_{12}(H, T_1)} > -\frac{U_{11}(H, T_1)}{U_1(H, T_1)} \quad (32)$$

Cette même hypothèse de croissance de l'aversion au risque de santé avec la durée de vie nous permet aussi d'écrire:

$$-\frac{U_{11}(H, T_1)}{U_1(H, T_1)} > -\frac{U_{11}(H, T_2)}{U_1(H, T_2)} \quad (33)$$



Les inégalités 32 et 33 nous assurant que l'inégalité 31 est respectée. Nous en concluons que les termes A et B de l'inéquation 30 sont négatifs si l'aversion au risque de santé est croissante avec la durée de vie et que dans ce cas  $\frac{dn}{dT_1} = 0$ .

Cette dernière méthode nous permet aussi d'affirmer que l'hypothèse d'aversion au risque de santé croissante avec la durée de vie nous assure que  $\frac{dn}{dT_1} > 0$ .

On peut donc en conclure que l'évolution de l'aversion au risque de santé avec la durée de vie définit le signe de  $\frac{dn}{dT_1}$ . Plus précisément:

- Si l'aversion au risque de santé est croissante avec la durée de vie :  
 $\frac{dn}{dT_1} < 0$
- Si l'aversion au risque de santé est constante avec la durée de vie :  
 $\frac{dn}{dT_1} = 0$
- Si l'aversion au risque de santé est décroissante avec la durée de vie :  
 $\frac{dn}{dT_1} > 0$

## H Dérivation du signe de $\frac{dn}{dT_2}$

En différenciant l'équation 13 par rapport à  $T_2$ , nous obtenons, après quelques réarrangements:

$$\frac{dn}{dT_2} = -\frac{1}{D} \cdot [p \cdot b(\pi \cdot U_{12}(nb, T_2)) - (1-p) \cdot c(\pi \cdot U_{12}(-nc, T_2))] \quad (34)$$

Puisque D est négatif, le signe de l'équation 34 dépend du signe de:

$$p \cdot b(\pi \cdot U_{12}(nb, T_2)) - (1-p) \cdot c(\pi \cdot U_{12}(-nc, T_2))$$

Nous savons de l'équation 13 que :

$$\frac{c \cdot (1-p)}{p \cdot b} = \frac{\pi \cdot U_1(nb, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(nb, T_2)}{\pi \cdot U_1(-nc, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(-nc, T_2)}$$

Le signe de l'équation 34 dépend donc du signe de:

$$\frac{U_{12}(nb, T_2)}{\pi \cdot U_1(nb, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(nb, T_2)} - \frac{U_{12}(-nc, T_2)}{\pi \cdot U_1(-nc, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(-nc, T_2)}$$

Ce qui nous amène à affirmer que:

$$\frac{\delta\left(\frac{U_{12}(H, T_2)}{\pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2)}\right)}{\delta H} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Rightarrow \frac{dn}{dT_2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

On peut donc dire, après décomposition de cette dernière (in)égalité, que le signe de  $\frac{dn}{dT_2}$  dépend du signe du numérateur de l'expression suivante:

$$\frac{U_{112}(H, T_2) \cdot M - U_{12}(H, T_2) \cdot N}{(\pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2))^2} \quad (35)$$

Avec:

$$M = \pi \cdot U_1(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_1(H, T_2) > 0$$

et

$$N = \pi \cdot U_{11}(H, T_1) + (1-\pi) \cdot U_{11}(H, T_2) < 0$$

Après avoir effectué quelques aménagements, on peut écrire le numérateur du terme 35 comme suit:

$$\frac{dn}{dT_2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \pi \cdot \underbrace{[U_{112}(H, T_2).U_1(H, T_1) - U_{12}(H, T_2).U_{11}(H, T_1)]}_A \quad (36)$$

$$+ (1 - \pi) \cdot \underbrace{[U_{112}(H, T_2).U_1(H, T_2) - U_{12}(H, T_2).U_{11}(H, T_2)]}_B \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$$

Le terme B de l'expression 37 correspond à la négative de la dérivée de l'aversion au risque de santé par rapport à la durée de vie (voir équation 9). Il s'ensuit qu'une aversion au risque de santé croissante (resp. constante; resp. décroissante) avec le temps de vie conduit à un terme B négatif (resp. constant; resp. positif)

On ne peut par contre reprendre l'analyse de l'appendice G pour définir le signe du terme A qui est nul si on suppose que l'aversion au risque de santé est constante par rapport à la durée de vie (on peut, pour le prouver, reprendre la même technique qu'à l'appendice G) mais qui est ambigu si l'aversion au risque de santé croît ou décroît par rapport à la durée de vie.

## I Effet d'une variation du risque préservant la moyenne sur l'intensité de traitement

Nous supposons que  $\pi$  et  $T_1$  varient en sens opposé de sorte que l'espérance de vie  $\pi.T_1 + (1 - \pi).T_2$  demeure constante. Pour ce faire, il faut que :

$$dT_1 = \frac{T_2 - T_1}{\pi}.d\pi \quad (37)$$

En différentiant l'équation 13 et en utilisant l'équation 37, nous obtenons après quelques aménagements:

$$\frac{dn}{d\pi} = -\frac{1}{D} = [pb.(U_1(nb, T_1) - U_1(nb, T_2) - (T_1 - T_2).U_{12}(nb, T_1)) - (1 - p)c.(U_1(-nc, T_1) - U_1(-nc, T_2) - (T_1 - T_2).U_{12}(-nc, T_1))]$$

Comme  $U_1$  est continu et différentiable, nous pouvons dire que:

$$U_1(nb, T_1) - U_1(nb, T_2) = (T_1 - T_2).U_{12}(nb, T')$$

et que:

$$U_1(-nc, T_1) - U_1(-nc, T_2) = (T_1 - T_2).U_{12}(-nc, T'')$$

Avec  $T_2 < T' < T_1$  et  $T_2 < T'' < T_1$

Le signe de  $\frac{dn}{d\pi}$  dépend donc du signe de:

$$pb.(U_{12}[nb, T'] - (U_{12}(nb, T))) - (1 - p)c.(U_{12}[-nc, T''] - (U_{12}(-nc, T)))$$

qui est indéfini compte tenu des hypothèses que nous avons faites.