

Soutenabilité forte, rente et partage de la valeur ajoutée*

Jean-François Fagnart[†], Marc Germain[‡], Alphonse Magnus[§]

Octobre 2013

Abstract

Dans un modèle de croissance endogène reposant sur le concept de soutenabilité forte et intégrant une ressource de matière (naturellement recyclable) dont la productivité marginale est bornée, cet article reconsidère la “conjecture de Ricardo”, à savoir l’éventualité d’une hausse tendancielle de la part de la rente dans la valeur ajoutée au cours du temps. Dans l’économie du modèle, une croissance quantitative (en termes du nombre de biens) ne peut être que transitoire et seule une croissance qualitative (en termes de qualité des biens) peut subsister à long terme.

Nous étudions l’impact de la rareté de la ressource sur les caractéristiques du sentier de croissance stationnaire, sur le niveau de la rente et le partage de la valeur ajoutée le long de celui-ci. La part stationnaire de la rente dans la valeur ajoutée est une fonction décroissante de l’abondance de la ressource et du potentiel de dématérialisation des productions. De plus, la rareté de la ressource oppose généralement le facteur travail aux deux autres (ressource et capital), une ressource moins abondante (en termes relatifs) impliquant une part plus faible du travail dans la valeur ajoutée et une part plus élevée de chacun des deux autres facteurs.

Nous analysons ensuite numériquement la dynamique transitoire de l’économie, partant d’un état initial caractérisé par un faible stock de capital, un potentiel de progrès technique important. Même si la part de la rente dans la valeur ajoutée peut initialement évoluer de façon non monotone, les simulations tendent à montrer que la “conjecture de Ricardo” se confirme tôt ou tard le long de la dynamique transitoire: le ralentissement de la croissance quantitative s’accompagne d’une hausse de la part de la rente dans la valeur ajoutée jusqu’à sa valeur stationnaire. La tendance historique d’une baisse de la part de la rente pourrait donc s’inverser dans le futur, dès lors que les processus de découvertes de nouvelles réserves et de dématérialisation de la production sont limités.

Mots clés: croissance endogène, soutenabilité forte, rente, partage fonctionnel de la valeur ajoutée.

JEL: E25, D9, O44, Q0, Q56

*Nous remercions Hélène Latzer pour ses commentaires.

[†]CEREC, Université Saint-Louis, Bruxelles et IRES, UCLouvain

[‡]EQUIPPE, Université de Lille 3 et IRES, UCLouvain

[§]IRMP, UCLouvain

Strong Sustainability, Rent and the Functional Distribution of National Income

Abstract

We reassess Ricardo's conjecture of a secular increase in rent in an endogenous growth model where final productions need a (naturally recyclable) material resource. The model satisfies the assumption of strong sustainability and thus assumes that the resource productivity is bounded. Hence, quantitative growth (i.e. the increase in the number of produced goods) is a transitory phenomenon and only qualitative growth (i.e. a secular increase in the quality of final productions) may persist in the long run.

We analyze how the resource scarcity affects the stationary growth path, the rent level and the functional distribution of national income along this path. The stationary rent share in added value is a decreasing function of the resource stock and of the dematerialization potential of final productions. Moreover, a lower resource stock will generally imply a lower labour share and higher capital and rent shares.

The transitory dynamics of the economy is analyzed numerically, starting from initial conditions characterized by a low capital stock, a large potential of technical progress. Even though initially the rent (share) may evolve non monotonically, simulations tend to confirm Ricardo's conjecture sooner or later along the transitory dynamics: as quantitative growth slows down, the rent share raises up to its stationary value. The downward trend observed historically for the rent share might thus get reversed in the future as the processes of resource discovery and of dematerialization of final productions are limited.

Key words: endogenous growth, strong sustainability, rent, functional distribution of income.

JEL: E25, D9, 044, Q0, Q56

1 Introduction

Malgré une relative éclipse entre les années 1960 et 1990, la question du partage de la valeur ajoutée a constitué dès les débuts de la science économique un sujet d'étude privilégié. Ainsi, Ricardo (1817) en faisait-il le “principal problème de l'Economie Politique”. Dans un article dont le titre paraphrase cette expression, Atkinson (2009) revient sur plusieurs raisons pour lesquelles le partage fonctionnel de la valeur ajoutée demeure une problématique importante, notamment parce qu'il permet d'établir un lien entre évolutions macro- et micro-économiques des revenus. Comme le soulignent Bentolita et Saint-Paul (2003), la question du partage de la valeur ajoutée traverse en outre le débat public et l'évolution de la part des salaires est souvent perçue comme un indicateur de la façon dont les fruits de la croissance sont partagés entre facteurs de production.

Chez Ricardo (op citum), la question du partage de la valeur ajoutée est indissociable de celle de la rente des propriétaires fonciers. Celle-ci résulte de l'exploitation de terres de fertilité inégale, plus précisément des différentiels de rendement qu'offrent les terres exploitées par rapport à la terre marginale, dont la valeur de la récolte couvre juste les coûts de production. Ricardo estimait que la croissance démographique contraindrait de recourir à des terres de moins en moins productives, ce qui conduirait à des rentes toujours plus élevées. Il formula donc la conjecture d'une hausse tendancielle de la part de la rente dans le revenu national et d'une baisse de la part des profits et, partant, d'une baisse de l'investissement et de la croissance économique¹.

Contrairement ce que prévoyait Ricardo, la part de la rente dans le revenu national a décliné dans les faits et demeure relativement faible dans les pays industrialisés (voir notamment Hill (2001)). Ceci explique sans doute pourquoi la rente, comprise comme la rémunération des facteurs de production non produits tels la terre et les ressources naturelles, a été progressivement négligée par la littérature². La question du partage du revenu national s'est ainsi essentiellement ramenée à celle du partage entre salaires et profits, comme en témoignent les travaux de Kalecki (1938), Kaldor (1956) et des travaux plus récents (voir notamment Bentolita et Saint-Paul (op citum), Young (2011), Zuleta et Young (2013)).

On trouvera chez Hill (op citum) l'exposé de différentes causes possibles de la baisse tendancielle de la part de la rente qui a caractérisé l'industrialisation des pays occidentaux. Ajoutons-y que si l'on pense aux ressources naturelles en général (et non plus spécifiquement à la terre), deux processus ont pu contrecarrer dans le passé la hausse de la part de la rente que conjecturait Ricardo: le progrès technique économiseur de ressources naturelles d'une part, des découvertes répétées de nouveaux gisements de ressources d'autre part. En réduisant pour l'un la demande de ressources et pour l'autre les coûts marginaux de leur exploitation, ces deux processus exercent une influence à la baisse sur leur prix et, partant, sur la rente qu'elles sont susceptibles de rapporter. Or, même si ces processus d'innovations et de découvertes sont loin d'être achevés, plusieurs arguments, avancés en particulier par le courant de l'économie écologique, suggèrent qu'ils ont leurs limites: 1) pour des raisons physiques, le progrès technique ou la substitution entre facteurs naturels et facteurs produits par l'homme ne permettront pas de se passer entièrement des ressources naturelles; 2) la découverte de nouveaux gisements (ou réserves) potentiellement exploitables se fait dans le cadre d'un stock de ressources qui est fini; 3) même si certaines ressources ont la propriété de se renouveler, leur exploitation est limitée par leur taux de renouvellement qui est borné.

Prenant soigneusement en compte les arguments du paragraphe précédent, cet article vise à reconsidérer la “conjecture de Ricardo” (c'est-à-dire l'éventualité d'une hausse tendancielle de la part de la rente dans la valeur ajoutée) dans une économie aux ressources finies. Dans un modèle de

¹Pour Ricardo, seuls les profits contribuent à l'épargne et ainsi, à l'investissement, l'accumulation et la croissance. La disparition des profits entraîne donc celle de la croissance.

²Si la rente n'est pas complètement ignorée dans certaines contributions, elle n'est pas explicitement distinguée et se retrouve agrégée avec d'autres revenus de la propriété (par opposition aux revenus du travail) ou avec d'autres revenus d'actifs non produits (par opposition aux revenus des actifs produits, c-à-d le capital accumulé). Dans certaines contributions de la littérature récente, en particulier le livre d'Askenazy et al. (2011) et les différentes contributions du n° 61 des Cahiers d'économie Politique (Assous, 2011), la rente n'est pas explicitement distinguée. Pour sa part, Atkinson (2009) regroupe profits et rentes au sein des revenus du capital, ceux-ci étant compris comme des revenus d'actifs financiers ou produits.

croissance endogène, nous étudions comment la rareté relative d'une ressource renouvelable essentielle à la production affecte la rente liée à son exploitation et le partage de la valeur ajoutée (entre ressource, capital et travail)³. Travail et capital peuvent être alloués à trois activités économiques: l'extraction de la ressource, la production finale et la recherche. Le progrès technique est le fruit de la recherche et améliore, d'une part, l'efficacité des facteurs et, d'autre part, la qualité des productions finales. Le modèle respecte le postulat de la soutenabilité forte et suppose que la productivité du facteur naturel est bornée. Une croissance quantitative (en termes du nombre de biens) indéfinie est donc impossible; seule une croissance qualitative (en termes de qualité des biens) indéfinie est éventuellement possible (voir notamment Fagnart et Germain (2011), Krysiak (2006)).

La structure de l'article est la suivante. La section 2 présente le modèle. La section 3 étudie son équilibre de long terme et la manière dont cet équilibre et le partage de la valeur ajoutée sont affectés par la rareté de la ressource naturelle. L'analyse est d'abord analytique dans le cadre d'un cas particulier où le rapport capital/travail est identique au sein de toutes les activités, puis est étendue numériquement au cas général.

La section 4 présente les résultats obtenus au niveau dynamique, via une approche numérique vu la taille et la complexité du modèle. L'analyse concerne d'abord le cas où la quantité de matière contenue dans le système économie - ressource naturelle est constante tout au long de la trajectoire de l'économie. Nous étudions ensuite une variante où une série de "découvertes" en début de simulation permet d'augmenter cette quantité. Nous étudions enfin les conséquences d'une pression démographique plus forte. La conclusion reprend les principaux résultats et formule trois propositions de recherche futures.

2 Le modèle

Le modèle est un modèle de croissance à la Ramsey, comprenant des ménages et des entreprises. Les ménages offrent leur travail de façon inélastique, reçoivent les revenus du travail, de leur épargne et de la propriété, en consomment une partie et investissent la différence sous forme de capital physique, qu'ils louent ensuite aux entreprises. Celles-ci sont regroupées en deux secteurs:

- (i) le secteur *primaire*, composé d'entreprises-exploitants en concurrence parfaite qui exploitent la ressource naturelle (RN ci-après). La rente de ce secteur est de nature ricardienne: chaque exploitant dispose d'un accès à la ressource et les accès diffèrent par leur rentabilité.
- (ii) le secteur *industriel*, composé de firmes en concurrence monopolistique ayant deux activités: une activité de *fabrication* de biens à usage final et une activité de *recherche* visant à augmenter la qualité de ces biens.

La matière extraite de la RN est vendue par le secteur primaire au secteur industriel qui la transforme en biens finaux. Ceux-ci ont donc un contenu en matière. Ces biens sont destinés à la consommation ou à l'investissement. Une fois consommés ou usagés, ils deviennent des déchets qui sont recyclés naturellement par l'environnement et retournent à la RN⁴

Au total, on distingue quatre types de marchés: les marchés des biens finaux, du travail, de la RN et du capital physique.

Les entreprises des secteurs primaire et industriel utilisent du capital k et du travail ℓ . Ces facteurs peuvent donc être affectés à trois activités différentes, symbolisées respectivement par l'indice e pour l'extraction, f pour la fabrication et r pour la recherche dans le même secteur. On note k_{zt} (resp. ℓ_{zt}) avec $z = e, f, r$ le capital (resp. le travail) affecté à l'activité z .

³A la différence de Hill (2001) qui vise à éclairer une réalité historique passée, notre exercice est davantage prospectif et repose sur l'intuition que la baisse de la part de la rente observée historiquement pourrait s'inverser dans le futur pour les raisons évoquées ci-dessus.

⁴Cette hypothèse de recyclage naturel est faite pour la simplicité de la modélisation puisqu'elle dispense de décrire une activité de recyclage proprement dite. Vu de cette hypothèse, la notion de RN utilisée ici évoque les grands cycles naturels que sont ceux du carbone, de l'azote, de l'eau,... *Sensu stricto*, elle exclut par contre les métaux et autres ressources non renouvelables dont le recyclage *naturel* est nul à l'échelle humaine.

Pour simplifier la présentation du modèle, nous supposons que les fonctions de production sectorielles sont à facteurs complémentaires. On notera λ_{zt} le rapport travail/capital dans l'activité z en t :

$$\frac{\ell_{zt}}{k_{zt}} = \lambda_{zt} \text{ pour } z = e, f, r. \quad (1)$$

La valeur de λ_{zt} est donnée en t mais décroît au cours du temps en fonction d'un progrès technique endogène (cfr. infra). Au niveau de chaque activité, les rapports capital/travail varient donc dans le temps; durant une période donnée, la substitution entre capital et travail au niveau agrégé découle de la réallocation de ces facteurs entre activités.

Les entreprises du secteur industriel sont incitées à investir dans la recherche de façon à améliorer la qualité de leurs produits. L'augmentation de la qualité se diffuse ensuite dans l'économie en contribuant au progrès technique, qui est donc endogène. La croissance de l'économie est donc à la fois quantitative, à travers l'augmentation de la quantité de biens produits, et qualitative, à travers l'augmentation de leur qualité.

Le progrès technique se traduit par une dématérialisation progressive des biens produits. Toutefois, une dématérialisation complète de ceux-ci est supposée impossible. Leur contenu en matière tend donc vers une valeur limite strictement positive. Cette hypothèse et celle de fonction de production à facteurs complémentaires constituent la façon la plus simple de traduire le fait que la productivité de la RN est inévitablement bornée (cfr. Anderson (1987), Baumgärtner (2004)).

L'hypothèse d'un recyclage intégral et gratuit des déchets est forte mais, vu la finitude du stock de RN et l'impossibilité d'une dématérialisation complète, elle n'empêche pas que la croissance quantitative (en termes du nombre de biens) de l'économie soit contrainte et que, si croissance indéfinie il y a, celle-ci ne puisse être que qualitative (en termes de qualité des biens).

2.1 Secteur primaire et rente des exploitants

La RN est homogène. Il y a un continuum $[0, N]$ d'accès à cette ressource. Chaque accès est géré par un exploitant. La quantité maximale qui peut être extraite d'un accès pendant une période est la même pour tous les accès et vaut R_t/N où R_t est le stock global de ressource en t .

Les accès à la ressource n'offrent pas la même rentabilité. On les classe par ordre de rentabilité décroissante, en indiquant par i celui qui vient en $i^{\text{ème}}$ position. Pour extraire une quantité x_{it} de RN à la date t , l'exploitant i ($i \in [0, N]$) a besoin d'une quantité de capital donnée par

$$k_{eit} = \frac{x_{it}}{1 - \frac{i}{N}} \quad (2)$$

L'exploitant le plus performant ($i = 0$) a donc un rapport capital/output unitaire. A l'autre extrême, l'exploitant le moins performant ($i = N$) a un rapport capital/output infini.

A chaque période t , chaque exploitant i choisit sa production x_{it} et ses niveaux d'inputs (k_{eit}, ℓ_{eit}) de façon à maximiser sa *rente*. Le marché de la ressource extraite est concurrentiel et les exploitants sont preneurs de prix. Notons P_{xt} le prix de vente la RN extraite, V_t le coût d'usage d'une unité de capital productif et W_t le salaire payé pour une unité de travail. Sous (1) et (2), le coût de production unitaire de l'exploitant le plus rentable (pour qui $k_{eit} = x_{it}$) vaut:

$$U_{et} =_{def} V_t + \lambda_{et} W_t \quad (3)$$

et la rente de tout exploitant i peut s'écrire

$$\theta_{it} = \left[P_{xt} - \frac{U_{et}}{1 - \frac{i}{N}} \right] x_{it}. \quad (4)$$

Comme la rente est linéaire en x_{it} , il en découle que les exploitants se séparent en 2 catégories: d'une part, ceux dont la rente unitaire est positive et qui offrent le maximum possible R_t/N ; d'autre part, ceux dont la rente unitaire est négative et dont l'offre est nulle. L'exploitant marginal dont

la rente est nulle est indifférent entre l'exploitation et la fermeture de son site. Celui-ci, indicé par n_t , est identifié par la condition $\theta_{n_t,t} = 0$: on a,

$$P_{xt} = \frac{U_{et}}{1 - \frac{n_t}{N}} \quad \text{ou} \quad n_t = N \left[1 - \frac{U_{et}}{P_{xt}} \right]. \quad (5)$$

Comme les exploitants $i \in [0, n_t]$ offrent $x_{it} = R_t/N$ alors que les exploitants $i \in [n_t, N]$ offrent $x_{it} = 0$, l'offre totale de ressource vaut

$$X_t = \int_0^{n_t} x_{it} di = n_t \frac{R_t}{N} = R_t \left[1 - \frac{U_{et}}{P_{xt}} \right], \quad (6)$$

la dernière égalité découlant de (5). L'offre X_t est d'autant plus élevée que la ressource est abondante, son prix élevé et les prix des inputs bas. On peut encore écrire cette relation d'offre comme une relation entre le prix de la ressource et le coût unitaire d'extraction de l'exploitant marginal:

$$P_{xt} = \frac{U_{et}}{1 - E_t} \quad \text{où} \quad E_t =_{def} \frac{X_t}{R_t}. \quad (7)$$

E_t est le taux d'exploitation de la ressource. Au vu de (2), le stock de capital mobilisé par l'ensemble des exploitants en activité s'écrit:

$$\begin{aligned} k_{et} &= \int_0^{n_t} k_{eit} di = \frac{R_t}{N} \int_0^{n_t} \frac{di}{1 - \frac{i}{N}} = R_t \ln \left(1 - \frac{n_t}{N} \right)^{-1} \\ &= R_t \ln (1 - E_t)^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

puisque $n_t/N = X_t/R_t (= E_t)$ au vu de (5) et (6). Tout comme le prix de la RN, la quantité de capital utilisée dans l'extraction et la quantité de travail (conformément à (1)) sont donc des fonctions croissantes et convexes du taux d'exploitation E_t .

Enfin, la rente totale du secteur extracteur s'écrit :

$$\begin{aligned} \Theta_t &= \int_0^{n_t} \theta_{it} di = P_{xt} X_t - U_{et} k_{et} \\ &= P_{xt} R_t \left[E_t - [1 - E_t] \ln (1 - E_t)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

la dernière égalité découle de la substitution de X_t , U_{et} et k_{et} par leur expression dans (6), (7) et (8). La rente est une fonction croissante du stock de RN, de son prix et du taux d'exploitation.

2.2 Secteur de la production finale

La production finale est réalisée par des entreprises en concurrence monopolistique. Elles forment un continuum dans l'intervalle $[0, 1]$. La firme $i \in [0, 1]$ est la seule à produire le bien i , dont elle fixe, à chaque période, le prix p_{it} et la qualité q_{it} . Le pouvoir de marché dont jouit chaque firme l'incite à investir dans la recherche de façon à améliorer la qualité de sa production. Le bien i est utilisé pour la consommation ou l'investissement et on note c_{it} les quantités de biens i destinées à de la consommation en t et d_{it} les quantités de biens i destinées à de l'investissement en t .

2.2.1 Demandes finales

Nous supposons un modèle de différenciation horizontale à la Dixit et Stiglitz (1977). Les agrégats de consommation et d'investissement dépendent des quantités de biens i achetées à des fins de consommation et d'investissement selon les indices CES suivants:

$$C_t = \left[\int_0^1 [\psi(q_{it}) c_{it}]^\alpha di \right]^{1/\alpha} \quad \text{et} \quad k_{t+1} = \left[\int_0^1 [\varphi(q_{it}) d_{it}]^\alpha di \right]^{1/\alpha} \quad (10)$$

où $0 < \alpha < 1$. Les fonctions $\psi(\cdot)$ et $\varphi(\cdot)$ sont positives, continues, et croissantes en q_{it} : ceteris paribus, des biens de consommation de meilleure qualité contribuent à un indice de consommation plus élevé; de même, des biens d'équipement de meilleure qualité ont une plus grande productivité en terme de formation du capital.

L'Annexe 7.1 détaille la dérivation des fonctions de demande c_{it} et d_{it} et des indices de prix à la consommation et à l'investissement. Ceux-ci valent respectivement

$$P_{ct} = \left[\int_0^1 \left[\frac{p_{it}}{\psi(q_{it})} \right]^{1-\varepsilon} di \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad P_{kt} = \left[\int_0^1 \left[\frac{p_{it}}{\varphi(q_{it})} \right]^{1-\varepsilon} di \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (11)$$

où $\varepsilon =_{def} \frac{1}{1-\alpha}$. La demande totale de bien i $y_{it} = c_{it} + d_{it}$ est une fonction décroissante de son prix et croissante de sa qualité. Comme l'Annexe 7.1 le montre, l'élasticité prix de la demande vaut $-\varepsilon$ alors que l'élasticité de la demande à la qualité vaut:

$$\frac{q_{it}}{y_{it}} \frac{\partial y_{it}}{\partial q_{it}} = (\varepsilon - 1) \left[\frac{c_{it}}{y_{it}} \frac{q_{it} \psi'(q_{it})}{\psi(q_{it})} + \frac{d_{it}}{y_{it}} \frac{q_{it} \varphi'(q_{it})}{\varphi(q_{it})} \right] \quad (12)$$

Afin de simplifier la présentation du modèle, nous utilisons dès maintenant la propriété de symétrie de l'équilibre de concurrence monopolistique⁵ et on omettra par la suite d'indiquer par i les variables décrivant le comportement d'une firme monopolistique et la demande pour sa production.

2.2.2 Technologie de fabrication

Fabriquer une quantité y_t à la période t réclame une quantité de matière égale à

$$x_t = [\chi_t + \mu_t] y_t \quad (13)$$

où $\mu_t (> 0)$ est la quantité de matière incorporée dans le bien et où $\chi_t (> 0)$ est la quantité perdue au niveau du processus de production. Il est aussi nécessaire d'utiliser du capital en quantité

$$k_{ft} = \kappa_t y_t \quad (14)$$

et, conformément à (1), du travail en quantité $\ell_{ft} = \lambda_{ft} k_{ft}$.

Les coefficients $\chi_t, \mu_t, \kappa_t, \lambda_{ft}$ déclinent au cours du temps en fonction d'un progrès technique endogène induit par un effet externe lié aux activités de recherche des entreprises (cfr. infra).

2.2.3 Recherche, innovation et progrès technique

Investir en recherche permet d'augmenter la qualité de la production, ce qui à prix donné stimule la demande pour celle-ci (cfr. (65)). Une entreprise innovante ne peut toutefois pas garder ses résultats pour elle-même plus d'une période: au début de la période t , toutes les firmes disposent de la même connaissance (ou qualité) Q_{t-1} , qui est un héritage public de tous les efforts de recherche passés. Si une entreprise investit dans la recherche, elle augmente la qualité de son produit au dessus du niveau moyen Q_{t-1} , et bénéficie d'un avantage concurrentiel pendant cette seule période. Les gains de qualité sont engendrés de façon déterministe: pour accroître la qualité de sa production y_t à un niveau $q_t > Q_{t-1}$, la firme doit doter son service de recherche d'un stock de capital égal à

$$k_{rt} = h \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) y_t \quad (15)$$

⁵La propriété que les firmes du secteur industriel prennent des décisions identiques découle du fait que (i) les biens finaux apparaissent de façon symétrique dans les indices de consommation et de capital et (ii) les entreprises ont accès à la même technologie (d'où la conséquence que les biens ont le même contenu en matière). Ces hypothèses manquent de réalisme mais elles ont l'avantage de simplifier le modèle de façon appréciable sans en atténuer la portée. Qualitativement parlant, les résultats obtenus dans cet article ne dépendent en effet pas de cette hypothèse.

où $h(\cdot)$ est une fonction croissante et convexe qui satisfait $h(1) = 0$ (aucun effort de recherche n'est nécessaire pour maintenir le niveau de qualité préexistant Q_{t-1}) et $h'(1) = 0$. Conformément à (1), la firme doit aussi engager un nombre de chercheurs égal à $\ell_{rt} = \lambda_{rt}k_{rt}$.

Les efforts de recherche engendrent par ailleurs un effet externe: à la fin de la période t , tous les résultats deviennent publics et les entreprises ont ensuite librement accès au niveau de qualité

$$Q_t = Q(q_{it}, i \in [0, 1]) \quad (16)$$

où $Q(\cdot)$ est une fonction croissante des efforts de recherche individuels. L'effet externe lié à ce niveau moyen de qualité atteint en fin de période t engendre un progrès technique touchant toutes les activités de l'économie en $t+1$. Les coefficients technologiques ($\chi_{t+1}, \mu_{t+1}, \kappa_{t+1}, \lambda_{ft+1}, \lambda_{rt+1}, \lambda_{et+1}$) évoluent négativement en fonction de Q_t . Formellement:

$$\chi_{t+1} = \chi(Q_t), \mu_{t+1} = \mu(Q_t), \kappa_{t+1} = \kappa(Q_t), \lambda_{zt+1} = \lambda_z(Q_t) \quad \text{avec } z = f, r, e. \quad (17)$$

$\chi(\cdot), \mu(\cdot), \kappa(\cdot), \lambda_z(\cdot)$ sont des fonctions monotones décroissantes de leur argument. Cependant, elles ne tendent pas vers zéro. On fait l'hypothèse cruciale que *toutes* les activités (y compris la recherche) requièrent directement ou indirectement de la matière, du capital et du travail. En d'autres termes, même s'il n'y a pas a priori de borne au progrès technique (en termes de hausse de qualité des biens produits), une dématérialisation totale de la production et des processus de production est impossible⁶. En conséquence, les coefficients technologiques ci-dessus sont supposés bornés inférieurement par des constantes strictement positives:

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} \chi(Q) = \underline{\chi} > 0, \quad \lim_{Q \rightarrow +\infty} \mu(Q) = \underline{\mu} > 0, \quad \lim_{Q \rightarrow +\infty} \kappa(Q) = \underline{\kappa} > 0, \quad \lim_{Q \rightarrow +\infty} \lambda_z(Q) = \underline{\lambda}_z > 0 \quad (18)$$

avec $z = f, r, e$. Ceci traduit que produire une unité du bien final exigera toujours une quantité non infinitésimale de matière et de capital; de même, toutes les activités (f, r, e) réclameront toujours une quantité non infinitésimale de travail par unité produite.

De même, on suppose que :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \varphi(q) = \bar{\varphi} < +\infty. \quad (19)$$

Il est donc impossible de produire un stock de capital infini avec une quantité finie de biens d'équipement, ce qui reflète que les instruments du processus de production (outils, machines et infrastructures) ne peuvent pas être complètement dématérialisés. En conséquence, la recherche exige elle-aussi de la matière de façon indirecte. Pour qu'un équilibre de long terme existe, il est nécessaire que $\bar{\varphi} > \underline{\kappa} + \underline{\chi} + \underline{\mu}$, ce que nous supposons.

2.2.4 Détermination du prix, de la production et de la qualité

A chaque période, chaque firme monopolistique choisit des niveaux de prix p_t , de qualité q_t , de production y_t et d'inputs k_{ft}, ℓ_{ft}, x_t de façon à maximiser son profit⁷ $\Pi_t = p_t y_t - V_t [k_{ft} + k_{rt}] - W_t [\ell_{ft} + \ell_{rt}] - P_{xt} x_t$.

Désignons par U_{zt} avec $z = f, r$ le coût de fonctionnement *total* d'une unité de capital affectée à l'activité z (avec $z = f, r$). Sous nos hypothèses technologiques (1), (14) et (15), on a

$$U_{zt} =_{def} V_t + \lambda_{ft} W_t \quad \text{avec } z = f, r. \quad (20)$$

⁶D'un point de vue théorique, ce postulat concorde avec Anderson (1987) et Baumgärtner (2004). D'un point de vue pratique, il paraît très réaliste: même dans une économie 'de services', une part de la production garde un contenu matériel. En effet, les services exigent, pour leur production, matière, énergie et travail, et ce dernier facteur demande lui-même, pour sa survie et sa reproduction, matière et énergie. En résumé, si le progrès technique et la réallocation sectorielle vers les services sont indiscutablement susceptibles de dématérialiser la production agrégée, une dématérialisation complète de celle-ci ou du processus de production est une abstraction irréalisable.

⁷Le fait que l'entreprise loue le capital et l'hypothèse de l'accès public à tous les résultats de recherche en fin de la période t (cfr (16)) permettent en effet d'étudier le comportement de la firme période par période.

Le coût en travail et en capital de la production de y_t unités de biens s'élève donc à $U_{ft}\kappa_t y_t$. De manière analogue, le coût en travail et en capital du centre de recherche d'une entreprise de taille y_t est de $U_{rt}h(q_t/Q_{t-1})y_t$. La fonction de profit de la période t peut donc se réécrire comme suit:

$$\Pi_t = p_t y_t - \left[U_{ft}\kappa(Q_{t-1}) + U_{rt}h\left(\frac{q_t}{Q_{t-1}}\right) + P_{xt}[\chi(Q_{t-1}) + \mu(Q_{t-1})] \right] y_t. \quad (21)$$

Le problème de décision de l'entreprise peut se représenter par la maximisation de (21) par rapport à p_t et q_t sous les contraintes (65) et $q_t \geq Q_{t-1}$ (Q_{t-1} étant donné). Ces choix de p_t et q_t déterminent par ailleurs le niveau d'activité (via (65)) et les niveaux de capital et d'emploi affectés à la production et la recherche. Après calculs, les conditions du premier ordre relatives au problème d'optimisation ci-dessus conduisent aux équations suivantes⁸ (cfr. Annexe 7.2) :

$$p_t = \frac{1}{\alpha} \left[U_{ft}\kappa(Q_{t-1}) + U_{rt}h\left(\frac{q_t}{Q_{t-1}}\right) + P_{xt}[\chi(Q_{t-1}) + \mu(Q_{t-1})] \right] \quad (22)$$

$$U_{rt}h'\left(\frac{q_t}{Q_{t-1}}\right) \frac{q_t}{Q_{t-1}} = \alpha p_t \left[\frac{c_t q_t \psi'(q_t)}{y_t \psi(q_t)} + \frac{d_t q_t \varphi'(q_t)}{y_t \varphi(q_t)} \right]. \quad (23)$$

L'équation (22) décrit le comportement en prix qui est le produit du coefficient de marge $1/\alpha (> 1)$ et du coût marginal de production (expression entre crochets⁹). L'équation (23) décrit l'effort de recherche optimal qui doit égaliser coût marginal et revenu marginal d'une augmentation de la qualité. Celui-ci (proportionnel au membre de droite) provient de la hausse de la demande induite par l'accroissement de q_t , tandis que le coût marginal (proportionnel au membre de gauche) provient du coût des facteurs supplémentaires exigés par la hausse de q_t .

2.3 Les ménages

Nous considérons des ménages à horizon infini qui épargnent en accumulant du capital physique qu'ils louent aux entreprises. Il y a implicitement trois catégories de ménages: les propriétaires de ressources qui reçoivent la rente du secteur primaire (Θ_t); les propriétaires des entreprises monopolistiques qui reçoivent les profits purs du secteur final (Π_t); les travailleurs (en nombre L) qui reçoivent les revenus du travail qu'ils offrent de façon inélastique ($W_t L$). Les revenus de la location du capital aux entreprises $V_t k_t$ sont partagés entre les ménages selon le capital qu'ils ont accumulé. Pour conserver une relative simplicité au modèle, nous supposons toutefois que les préférences des ménages sont représentables par des fonctions d'utilité homothétiques et identiques. Cette hypothèse simplificatrice fait que la propension à épargner est indépendante du niveau et des sources de revenus (salaires, profits et rente), contrairement à l'approche kaldorienne de Hill (2001). Sous cette hypothèse, on peut décrire le comportement des ménages par celui d'un seul agent qui recevrait l'ensemble du revenu macroéconomique, en consomme une partie et investit le reste sous forme de capital physique.

S'agissant de l'accumulation du capital, on suppose (i) un délai d'une période entre la décision d'investissement et la formation du capital et (ii) une durée de vie d'une période de ce dernier¹⁰. En conséquence, l'investissement de la période t se confond avec le stock de capital louable à la période suivante, k_{t+1} .

La contrainte de budget des ménages en t s'écrit donc $P_{kt}k_{t+1} + P_{ct}C_t = V_t k_t + W_t L + \Pi_t + \Theta_t$, où $P_{kt}k_{t+1}$ et $P_{ct}C_t$ désignent respectivement les dépenses d'investissement et de consommation de la période. Pour rappel, les grandeurs k_{t+1} et C_t sont les indices à la Dixit-Stiglitz donnés plus hauts et P_{kt} et P_{ct} désignent respectivement les indices de prix du capital et de la consommation.

⁸La propriété $h'(1) = 0$ garantit que $q_t \geq Q_{t-1}$ est non liante.

⁹Produire une unité supplémentaire exige un surplus de capital (dont le coût de fonctionnement total est la somme des deux premiers termes) et un surplus de matière (dont le coût est le troisième terme).

¹⁰Cette hypothèse de taux de dépréciation unitaire permet d'éviter qu'il existe plusieurs générations de capital hétérogènes en termes de contenu de matière, car fabriquées au moyen de biens finaux de plus en plus légers. Si la dépréciation du capital s'étendait sur plusieurs périodes, il faudrait recourir à un modèle à générations de capital beaucoup plus complexe que celui développé ici, et qui ne changerait pas fondamentalement les résultats obtenus.

Les préférences des ménages sont représentées par la fonction d'utilité intertemporelle $\sum_{t=1}^T \beta^t \mathcal{U}(c_t)$ où $0 < \beta < 1$ est le coefficient de préférence intertemporel, T l'horizon de temps (éventuellement infini) et

$$\mathcal{U}(C_t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma-1} C_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} & \text{si } \sigma > 0 \text{ et } \sigma \neq 1 \\ \ln(C_t) & \text{si } \sigma = 1, \end{cases}$$

où σ est l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation. Le profil intertemporal de consommation doit satisfaire la condition suivante:

$$\left[\frac{C_{t+1}}{C_t} \right]^{\frac{1}{\sigma}} = \beta \frac{1 + \rho_{t+1}}{P_{ct+1}/P_{ct}} \quad \text{où} \quad \rho_{t+1} =_{def} \frac{V_{t+1}}{P_{kt}} - 1. \quad (24)$$

ρ_{t+1} désigne le taux de rendement de l'épargne (ici de la location du capital) en $t + 1$.

2.4 L'équilibre

2.4.1 Equilibre économique

A l'équilibre symétrique du secteur de production finale, (16) se réduit à $Q_t = Q(q_t)$. Par souci de simplicité, on supposera que $Q_t = q_t$. En normalisant l'indice de prix de la consommation P_{ct} à 1, les relations entre les indices des prix et le prix p_t des biens finaux deviennent respectivement:

$$1 = P_{ct} = \frac{p_t}{\psi(q_t)} \quad \text{et} \quad P_{kt} = \frac{p_t}{\varphi(q_t)} = \frac{\psi(q_t)}{\varphi(q_t)}. \quad (25)$$

Les relations (10) entre les indices de consommation et de capital et les demandes correspondantes de biens finaux s'écrivent simplement:

$$C_t = \psi(q_t)c_t \quad \text{et} \quad k_{t+1} = \varphi(q_t)d_t. \quad (26)$$

Ci-après, on utilise les minuscules w_t , v_t , p_{xt} et u_{zt} où $z = e, f, r$ pour désigner la valeur réelle des variables W_t , V_t , P_{xt} et U_{zt} lorsque celles-ci sont déflatées par le prix des biens finaux $p_t = \psi(q_t)$: $w_t =_{def} W_t/\psi(q_t)$, $p_{xt} =_{def} P_{xt}/\psi(q_t)$ et, pour $z = e, f, r$. Les coûts unitaires réels liés à l'utilisation du mixte capital-travail peuvent s'écrire:

$$u_{zt} = v_t + \lambda_z(q_{t-1})w_t \quad (27)$$

où, v_t , le loyer réel du capital vaut:

$$\begin{aligned} v_t =_{def} V_t/\psi(q_t) &= \frac{V_t}{P_{kt-1}} \frac{P_{kt-1}}{p_t} \\ &= [1 + \rho_t] \frac{\psi(q_{t-1})}{\varphi(q_{t-1})\psi(q_t)} \end{aligned} \quad (28)$$

où la deuxième égalité découle de la définition de ρ_t (voir 24) et de l'expression de P_k dans (25).

Les conditions d'équilibre des différents marchés s'écrivent comme suit.

- **Equilibre du marché de la ressource naturelle:** La demande de ressource vaut $X_t = x_t$ (donnée par (13)) et l'équilibre offre-demande est donc donné par

$$x_t = [\chi(q_{t-1}) + \mu(q_{t-1})]y_t \quad (29)$$

où l'offre x_t satisfait la condition d'optimalité

$$p_{xt} = \frac{u_{et}}{1 - \frac{x_t}{R_t}}. \quad (30)$$

- **Equilibre des marchés des biens finaux:** l'offre de chaque entreprise monopolistique satisfait la demande de biens de consommation et d'investissement qui découle de ses choix de prix et qualité. On a

$$y_t = c_t + \frac{k_{t+1}}{\varphi(q_t)}, \quad (31)$$

le comportement en prix et l'effort de recherche des entreprises étant décrits comme suit:

$$\alpha = u_{ft}\kappa(q_{t-1}) + u_{rt}h\left(\frac{q_t}{q_{t-1}}\right) + p_{xt}[\chi(q_{t-1}) + \mu(q_{t-1})] \quad (32)$$

$$u_{rt}h'\left(\frac{q_t}{q_{t-1}}\right)\frac{q_t}{q_{t-1}} = \alpha\left[\frac{c_t}{y_t}\frac{q_t\psi'(q_t)}{\psi(q_t)} + \left[1 - \frac{c_t}{y_t}\right]\frac{q_t\varphi'(q_t)}{\varphi(q_t)}\right], \quad (33)$$

alors que le profil intertemporel de la consommation des ménages satisfait la condition

$$\left[\frac{\psi(q_{t+1})c_{t+1}}{\psi(q_t)c_t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} = \beta[1 + \rho_{t+1}]. \quad (34)$$

- **Equilibre des marchés du capital et du travail:** le prix du capital et le salaire s'ajustent pour que les entreprises demandent un stock de capital $k_{ft} + k_{rt} + k_{et}$ égal à celui qu'ont accumulé les ménages k_t et embauchent un nombre de travailleurs $\ell_{ft} + \ell_{rt} + \ell_{et}$ égal à l'offre de travail L :

$$k_t = \kappa(q_{t-1})y_t + h\left(\frac{q_t}{q_{t-1}}\right)y_t + R_t \ln\left[1 - \frac{x_t}{R_t}\right]^{-1} \quad (35)$$

$$L = \lambda_f(q_{t-1})\kappa(q_{t-1})y_t + \lambda_r(q_{t-1})h\left(\frac{q_t}{q_{t-1}}\right)y_t + \lambda_e(q_{t-1})R_t \ln\left[1 - \frac{x_t}{R_t}\right]^{-1}. \quad (36)$$

2.4.2 Cycle de la matière

Après consommation ou mise au rebut, les biens finaux engendrent des déchets matériels qui sont rejetés dans l'environnement. Ceux-ci sont recyclés naturellement et contribuent à nouveau au stock de RN. A tout instant, l'évolution de ce stock dépend donc négativement de la quantité extraite par le secteur primaire (le flux de sortie) et positivement de la quantité de déchets recyclés par l'environnement (le flux d'entrée). L'économie et la RN forment donc un cycle de matière, supposé fermé c'est-à-dire sans échange avec l'extérieur. En vertu du principe de conservation de la matière, la quantité de matière M qui est contenue dans le système économie-RN est constante. Au début de chaque période t , celle-ci se trouve soit sous la forme de RN, soit incorporée dans le stock de capital installé, autrement dit (cfr. Annexe 7.3) :

$$M = R_t + \mu(q_{t-2})\frac{k_t}{\varphi(q_{t-1})}. \quad (37)$$

On a donc un système dynamique de 9 équations (29) à (37) à 9 inconnues $y_t, c_t, R_t, x_t, k_{t+1}, q_t, \rho_t, p_{xt}, w_t$. Les conditions initiales sont k_1, q_0, q_{-1} et les conditions terminales sont $c_T = y_T$ et $k_{f,T+1}, k_{r,T+1}, k_{e,T+1} = 0$.

2.4.3 Partage de la valeur ajoutée

La valeur ajoutée macroéconomique $p_t y_t$ se répartit entre masse salariale $W_t L$, rente du secteur extracteur Θ_t et rémunération du facteur capital, comprise ici comme la somme du loyer du capital $V_t k_t$ et des profits purs du secteur monopolistique Π_t . Nous noterons respectivement par $PRVA_t$, $PKVA_t$ et $PSVA_t$ la part de la rente, du capital et du travail dans la valeur ajoutée.

On a (avoir Aénexe 7.4 pour le détail):

$$PRVA_t = \frac{\Theta_t}{p_t y_t} = [\chi_t + \mu_t] p_{xt} \left[1 - \frac{1 - E_t}{E_t} \ln(1 - E_t)^{-1}\right] \quad (38)$$

$$= [\chi_t + \mu_t] u_{et} G(E_t) \quad \text{avec} \quad G(E_t) =_{def} \frac{1}{1 - E_t} + \frac{\ln(1 - E_t)}{E_t}. \quad (39)$$

On vérifie que pour $E_t \in [0, 1]$, $G(E)$ est continue en E , $G(0) = 0$ et $G'(E_t) > 0$. La part de la rente dans la valeur ajoutée est donc d'autant plus grande que

- la technologie de production en place est intensive en ressource ($\chi_t + \mu_t$ élevé)
- le prix de la ressource p_{xt} est élevé;
- le taux d'extraction de la ressource E_t est élevé: un taux d'extraction plus élevé tend à augmenter la rente parce qu'il éloigne l'efficacité de l'exploitant marginal de celle de l'exploitant le plus performant et accroît ainsi l'écart entre le prix de la ressource (qui est aussi le coût unitaire de l'exploitant marginal) et le coût unitaire de l'exploitant le plus rentable.

Bien entendu, le niveau de p_{xt} n'est pas indépendant de E_t (cfr. (30)) et celle de E_t dépend elle-même de l'intensité en ressource de la technologie. *Ceteris paribus*, une technologie plus intensive en ressource (une valeur plus élevée de $[\chi_t + \mu_t]$) impliquera une valeur plus élevée de E_t et donc aussi de p_{xt} , le tout contribuant à une part plus élevée de la ressource dans la valeur ajoutée.

La part totale du capital dans la valeur ajoutée en t vaut (cfr. Annexe 7.4)

$$\begin{aligned} PKVA_t &= \frac{\Pi_t}{p_t y_t} + \frac{V_t k_t}{p_t y_t} = 1 - \alpha + v_t \frac{k_t}{y_t} \\ &= 1 - \alpha + v_t \left[\kappa_t + h \left(\frac{q_t}{q_{t-1}} \right) + \frac{\chi_t + \mu_t}{E_t} \ln [1 - E_t]^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Comme l'élasticité-prix des demandes finales est constante, la part des profits *purs* (c-à-d hors loyer du capital) du secteur monopolistique dans la valeur ajoutée $p_t y_t$ est constante ($1 - \alpha$). La part du loyer du capital dans la valeur ajoutée sera d'autant plus grande que le loyer réel est lui-même élevé et que les différentes activités (production, recherche et extraction) sont capitalistiques.

La part des salaires est le complémentaire des deux autres: $PSVA_t = 1 - PKVA_t - PRVA_t$.

2.5 Equilibre de long terme

Le progrès technologique issu des activités de recherche fait que les fonctions paramétriques $\kappa, \lambda_f, \lambda_r, \lambda_e, \mu, \chi, \varphi$ diminuent dans le temps mais atteignent *in fine* leurs valeurs limites. L'économie atteint alors son équilibre de long terme qui, comme chez Fagnart-Germain (2011), est un sentier de croissance caractérisé par la constance des variables en volume (y, c, k) ou en matière (R, x) et par la hausse à taux constant du niveau de qualité q . Désignons par \hat{q} le facteur de croissance de la qualité le long du sentier de long terme:

$$\left(\frac{q_t}{q_{t-1}} \right)_{longterme} =_{def} \hat{q}$$

Désignons par \hat{C} le facteur de croissance de l'indice de consommation le long de ce sentier:

$$\left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right)_{longterme} =_{def} \hat{C} = \frac{\psi(q_t)}{\psi(q_{t-1})}.$$

L'égalité de droite découle du fait que le long d'un sentier stationnaire, la croissance de l'indice de consommation est uniquement liée à celle de la qualité. Nous postulons que $\psi(q) = q^\eta$, où $0 < \eta \leq 1$. Dans ce cas, la relation précédente devient $\hat{C} = \hat{q}^\eta$ et l'expression stationnaire de la condition décrivant le comportement de lissage de la consommation (34) s'écrit comme une relation positive entre le taux de croissance de la qualité et le taux de rendement du capital ρ :

$$\hat{q}^{\frac{\eta}{\sigma}} = \beta [1 + \rho]. \quad (40)$$

Un taux de croissance de la qualité plus élevé signifie une sentier de croissance plus pentu de l'indice de consommation, ce qui n'est compatible avec le comportement de lissage de la consommation des

ménages que si le rendement de l'épargne est plus élevé. Autrement dit, un taux de croissance de la qualité plus élevé exige plus d'effort de recherche et d'investissement en capital, investissement auquel les ménages ne sont incités que si le rendement du capital est plus élevé.

Ci-après, nous réécrivons les expressions stationnaires des conditions d'équilibre (29), (31), (35), (36) et de l'équation de conservation de la matière (37) en réexprimant les variables en niveau en variable par tête. Ainsi, nous notons \tilde{y} la production matérielle par tête: $\tilde{y} =_{def} y/L$. De même, les variables \tilde{c} , \tilde{k} et \tilde{R} désignent les valeurs par habitant des variables c, k, R . On a

$$\tilde{y} = \tilde{c} + \frac{\tilde{k}}{\varphi} \quad (41)$$

$$E\tilde{R} = [\underline{\chi} + \underline{\mu}] \tilde{y} \quad (42)$$

$$\tilde{k} = \underline{\kappa}\tilde{y} + h(\hat{q})\tilde{y} + \tilde{R}\ln(1-E)^{-1} \quad (43)$$

$$1 = \underline{\lambda}_f \underline{\kappa}\tilde{y} + \underline{\lambda}_r h(\hat{q})\tilde{y} + \underline{\lambda}_e \tilde{R}\ln(1-E)^{-1} \quad (44)$$

$$\frac{M}{L} = \tilde{R} + \frac{\underline{\mu}\tilde{k}}{\varphi}. \quad (45)$$

Enfin, les expressions stationnaires des conditions d'optimalité sur p et q ((32) et (33)) sont

$$\alpha = u_f \underline{\kappa} + u_r h(\hat{q}) + u_e \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1-E} \quad (46)$$

$$\alpha \eta \frac{\tilde{c}}{\tilde{y}} = u_r h'(\hat{q}) \hat{q} \quad (47)$$

où (46) utilise (30), (47) fait usage du fait que la somme pondérée ξ (voir (12)) tend vers le produit de l'élasticité de $\psi(q)$ et de $c/y = \tilde{c}/\tilde{y}$ à long terme; les valeurs stationnaires des variables (auxiliaires) de coût unitaire (27) sont données par $u_z = v + \underline{\lambda}_z w$ (avec $z = f, r, e$.) où le niveau stationnaire du loyer réel du capital (obtenu en introduisant (40) dans (28)) vaut

$$v = \frac{(1+\rho)}{\hat{q}^\eta} \frac{1}{\varphi} = \frac{(1+\rho)^{1-\sigma}}{\beta^\sigma \varphi}. \quad (48)$$

En observant les équations de ce système stationnaire, on note que les variables du système ne dépendent des dotations en matière M et en main d'oeuvre L qu'à travers leur rapport M/L , rapport que nous désignerons ensuite par m : $m =_{def} M/L$. Dès lors, doubler M et L laisse m inchangé et n'affecte pas la solution du système stationnaire (40)-(47): en particulier, la valeur de \tilde{y} est inchangée, ce qui implique que $y = L\tilde{y}$ double comme M et L . Les rendements d'échelle de la production matérielle y par rapport aux dotations M et L sont donc constants. Il s'en suit que les rendements d'échelle par rapport à chaque dotation (l'autre étant constante) sont décroissants.

3 Statique comparative par rapport à m

Étudions maintenant comment évolue l'équilibre de long terme du modèle en fonction de l'abondance relative de la ressource matérielle. L'étude se fait en deux étapes, d'abord analytiquement dans le cadre d'un cas particulier où les différentes activités se caractérisent par un rapport capital/travail identique, et ensuite numériquement dans le cas général.

Il y a deux façons d'interpréter cet exercice de statique comparative. D'un côté, il compare les équilibres stationnaires de deux économies qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le niveau d'abondance relative des ressources matérielles. De l'autre, on peut le voir comme un exercice permettant de cerner les conséquences macroéconomiques de la stabilisation de la taille de la population à des niveaux plus ou moins élevés, compte tenu du caractère limité des ressources matérielles. On doit en effet considérer que la quantité M de matière est une donnée immuable à l'échelle de l'histoire de l'homme. Considérer des valeurs de m plus ou moins élevées revient alors à considérer des niveaux stationnaires différents de la population de l'économie.

3.1 Approche analytique dans un cas particulier

Pour faciliter l'exploration analytique de l'état stationnaire, on fait l'hypothèse que le rapport capital/travail est homogène au sein des différentes activités, c'est-à-dire que

$$\underline{\lambda}_f = \underline{\lambda}_r = \underline{\lambda}_e = \underline{\lambda}. \quad (49)$$

Une conséquence importante de l'hypothèse (49) est que le coût unitaire lié à l'utilisation du mixte capital-travail est identique dans les trois activités (production, recherche et extraction) comme le montre l'expression (27): $u_z = v + \underline{\lambda}_z w =_{def} u$ pour $z = e, f, r$. On en déduit immédiatement ce qui suit.

Lemme 1 :

Si la ressource matérielle est plus abondante par rapport à la dotation en facteur travail,

1. *elle l'est aussi par rapport au facteur capital;*
2. *le niveau stationnaire du stock de ressource disponible par tête \tilde{R} est également plus élevé.*

Formellement,

$$\frac{d(\tilde{k}/m)}{dm} \left(\text{or } \frac{d(k/m)}{dm} \right) < 0, \quad \frac{d\tilde{R}}{dm} > 0 \quad \text{et, si } dm > 0, \quad \frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} > \frac{d\tilde{m}}{\tilde{m}}. \quad (50)$$

Preuve:

1. Réécrivons la condition d'équilibre du marché du capital comme une équation donnant le rapport capital/output (on divise donc (43) par \tilde{y}). En utilisant (42), on a

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{y}} = \underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} \ln(1 - E)^{-1}. \quad (51)$$

En faisant de même pour la condition d'équilibre du marché du travail, on obtient

$$\frac{1}{\tilde{y}} = \lambda \left[\underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} \ln(1 - E)^{-1} \right]. \quad (52)$$

Diviser (51) par (52) donne $\tilde{k} = 1/\lambda$: le capital par tête ne dépend pas de m sous l'hypothèse (49). Il en découle que \tilde{k}/m est plus petit quand m est plus grand.

2. Puisque \tilde{k} ne dépend pas de m , (45) implique que $d\tilde{R} = dm$ et, si $dm > 0$,

$$\frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}} = \frac{dm}{m - \underline{\mu}\tilde{k}/\varphi} > \frac{dm}{m}.$$

■

Le point 2 du Lemme 1 est une conséquence de ce que la quantité de matière immobilisée dans les équipements productifs en place $\left(\underline{\mu}\tilde{k}/\varphi\right)$ ne dépend pas de m dans une situation stationnaire: une hausse de m se traduit donc par la même augmentation du niveau la ressource disponible \tilde{R} .

3.1.1 Impact de m sur les taux (E, s, \hat{q}, ρ) et les niveaux $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{c})$

Ci-après, nous désignons par s le taux d'épargne stationnaire: $s =_{def} \tilde{k}/(\varphi\tilde{y})$ (et donc $\tilde{c}/\tilde{y} = 1 - s$ via (31)¹¹). Sous l'hypothèse (49), le système stationnaire peut être réduit à un système de 3

¹¹On fera remarquer que le taux d'épargne ainsi défini correspond bien à la fraction des revenus primaires que les ménages épargnent (c'est-à-dire consacrent à l'accumulation du capital) et que $1 - s$ correspond bien à la fraction des revenus primaires dédiée à la consommation finale: au vu de la valeur des ratios P^k/p et P^C/p (voir (25)),

$$\frac{P^k k}{py} = \frac{k}{\varphi y} \left(= \frac{\tilde{k}}{\varphi y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{P^C C}{py} = \frac{P^C}{p} \frac{\psi(q)c}{y} = \frac{c}{y} \left(= \frac{\tilde{c}}{\tilde{y}} \right).$$

équations à 3 inconnues E, s et \hat{q} (cfr. l'Annexe 7.5 pour les détails mathématiques):

$$s\bar{\varphi} = \kappa + h(\hat{q}) - \frac{\chi + \mu}{E} \ln(1 - E) \quad (53)$$

$$E = \frac{1}{s} \frac{\chi + \mu}{m\lambda\bar{\varphi} - \mu} \quad (54)$$

$$\eta[1 - s] \left[\kappa + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1 - E} \right] = h'(\hat{q})\hat{q} \quad (55)$$

On peut en déduire les résultats suivants:

Proposition 1 :

1. Si les valeurs stationnaires du taux d'épargne et du taux d'extraction de la ressource ne sont pas trop élevées, une plus grande abondance de la ressource matérielle par tête ($dm > 0$) implique à long terme des niveaux plus faibles du taux d'extraction de la ressource, du taux de croissance de la qualité, du taux d'épargne et de son taux de rendement. Formellement, en tout équilibre stationnaire satisfaisant les conditions

$$s < 2/3 \quad (56)$$

$$E < \frac{\tau}{1 + \tau} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{\bar{\varphi}}{\chi + \mu} \left[\frac{1}{\eta} - 1 + 2s \right] > 0, \quad (57)$$

on vérifie que :

$$\text{sign} \left(\frac{dE}{dm} \right) = \text{sign} \left(\frac{d\hat{q}}{dm} \right) = \text{sign} \left(\frac{ds}{dm} \right) = \text{sign} \left(\frac{d\rho}{dm} \right) < 0.$$

2. Sous les mêmes conditions (56) et (57), une contrainte de ressource moins sévère ($dm > 0$) se traduit, à l'équilibre stationnaire, par un niveau plus élevé de la production matérielle finale par habitant, de la consommation intermédiaire en ressource par habitant et de la consommation matérielle finale par habitant. Formellement,

$$\frac{d\tilde{y}}{dm}, \frac{d\tilde{x}}{dm}, \frac{d\tilde{c}}{dm} > 0. \quad (58)$$

Preuve: Voir Annexes 7.6.1 pour le point 1 et 7.6.2 pour le point 2.

Faisons remarquer que les conditions (56) et (57) sont suffisantes (mais non nécessaires) au résultat de la Proposition 1. (56) est vérifiée dès lors que l'équilibre de long terme est calibré sur les taux d'épargne observés empiriquement. (57) est également vérifiée par un grand nombre d'équilibres. Par exemple, pour $s=0.25$, τ peut être facilement supérieur à 1 si η est choisi suffisamment plus petit que 1 et/ou si $\bar{\varphi}$ est choisi suffisamment supérieur à $\chi + \mu$.

Les intuitions derrière la Proposition 1 sont assez claires. Comme les ménages valorisent la consommation matérielle, une plus grande abondance relative de la ressource matérielle incite à une augmentation de la production matérielle par tête \tilde{y} (et de la consommation \tilde{c}). Puisque cette plus grande abondance de la ressource laisse \tilde{k} inchangé (cfr. Lemme 1), elle implique inévitablement une baisse du taux d'épargne des ménages (ou une hausse de \tilde{c}/\tilde{y}). Cette baisse du taux d'épargne doit donc aussi s'accompagner d'une baisse du rendement ρ de l'épargne. Au vu de (40), les ménages choisissent donc un sentier de croissance stationnaire moins pentu de l'indice de consommation, ce qui signifie aussi une baisse du taux de croissance de la qualité des biens \hat{q} (seul élément responsable de la croissance de l'indice de consommation le long d'un sentier stationnaire).

Comme on peut le comprendre aisément, le lien négatif entre m et le taux d'extraction est l'effet de deux forces contradictoires: (i) un effet négatif lié à l'augmentation de \tilde{R} qui traduit simplement le fait qu'à production constante, E diminue si R augmente et (ii) un effet positif lié à la hausse de

la production. Le premier effet l'emporte sur le second car \tilde{R} augmente proportionnellement plus que m (voir Lemme 1) alors que \tilde{y} (et donc \tilde{x}) augmente proportionnellement moins que m .

Si la valeur agrégée du capital par habitant ne change pas avec m , il faut faire remarquer qu'il n'en va pas de même pour ses composantes puisqu'on observe une réaffectation du capital entre les différentes activités. Comme $dm > 0$ implique une production matérielle par habitant plus élevée, davantage de capital (par habitant) doit être alloué à la production matérielle. Il en découle que la somme du capital par habitant alloué à la recherche et du capital par habitant alloué à l'extraction décroît si $dm > 0$. Mais il n'est pas possible de dire analytiquement ce qu'il advient du niveau de chacune ces deux variables. On peut toutefois être certain que la réduction du ratio capital/output \tilde{k}/\tilde{y} découle d'une moindre intensité capitalistique tant dans l'effort de recherche des entreprises monopolistiques et que dans le secteur de l'extraction. En effet, quand on examine (51), on voit que les deux derniers termes du membre de droite¹² diminuent quand m augmente.

3.1.2 Impact de m sur les prix réels (w, v, p_x)

De l'analyse précédente, on peut aisément déduire la proposition suivante.

Proposition 2 *Sous les conditions (56) et (57), une plus grande abondance de la ressource par tête ($dm > 0$) implique, par rapport aux prix p de la production finale,*

- *un niveau plus élevé des coûts unitaires réels u liés à l'utilisation du mixte capital-travail:*

$$\frac{du}{dm} > 0;$$

- *un loyer réel du capital v plus faible ou plus élevé selon que l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation soit inférieure ou supérieure à l'unité:*

$$\frac{dv}{dm} \begin{cases} < 0 & \text{si } \sigma < 1 \\ = 0 & \text{si } \sigma = 1 \\ > 0 & \text{si } \sigma > 1; \end{cases}$$

- *un salaire réel plus élevé si $\sigma \leq 1$ ou si σ est supérieur mais dans un voisinage de 1.*
- *L'abondance de la ressource a un impact ambigu sur son prix réel p_x .*

Preuve: Voir Annexe 7.6.3 ■

L'examen de (47) montre que des valeurs plus faibles de \hat{q} et du taux d'épargne s ne sont compatibles avec le comportement en recherche des entreprises que si le coût unitaire réel u augmente suffisamment. En effet, la baisse de s (ou la hausse de \tilde{c}/\tilde{y}) augmente le revenu marginal de l'effort de recherche (membre de droite de (47)) et tendrait donc à stimuler les efforts de recherche toutes autres choses égales par ailleurs: en régime stationnaire, l'investissement en recherche ne profite plus qu'à l'amélioration de la qualité des biens de consommation et l'incitation à un tel investissement est d'autant plus forte que la part de la demande de consommation dans la demande totale est élevée ou encore que le taux d'épargne est faible. Mais comme l'intensité de l'effort de recherche diminue, cet effet positif est nécessairement plus que compensé par une hausse du coût lié à l'utilisation du mixte capital-travail dans les activités de recherche. Il en découle aussi que le salaire réel w et/ou le loyer réel du capital v augmentent lorsque la ressource est plus abondante.

Le rôle de σ dans l'impact de m sur v se comprend à l'examen de (48). Un m plus élevé implique des valeurs de ρ et \hat{q} plus faibles avec des effets contradictoires sur v : la baisse de ρ tend à réduire v ; celle de \hat{q} fait le contraire. Mais ρ et \hat{q} sont liées par (40): pour être compatible avec le comportement des consommateurs, une variation (baisse) du facteur de croissance de la

¹²Au coefficient est $\underline{\chi} + \underline{\mu}$ près, le dernier terme est strictement proportionnel à l'intensité capitalistique du secteur d'extraction dont l'output \tilde{x} est proportionnel à \tilde{y} .

consommation (c'est-à-dire, le long d'un sentier stationnaire, une variation de \hat{q}^η) réclame une variation proportionnelle de $[1 + \rho]^\sigma$ et donc une baisse plus (resp. moins) que proportionnelle de $1 + \rho$ lorsque σ est inférieure (resp. supérieure) à 1. Le loyer réel du capital baisse donc lorsque $\sigma \leq 1$ puisqu'alors \hat{q}^η (ou encore $[1 + \rho]^\sigma$) baisse proportionnellement moins que $1 + \rho$.

La hausse du salaire qui se produit (sauf éventuellement dans les cas où v augmenterait plus que u) résulte de ce que la plus grande abondance de ressource relativement à la dotation en travail se traduit par une plus forte tension entre la demande et l'offre de travail.

L'ambiguïté dans l'évolution de p_x résulte de ce que l'effet de la baisse de E (qui réduit le coût d'extraction de l'exploitant marginal toutes autres choses égales par ailleurs) peut (ou non) compenser l'effet de la hausse du coût unitaire u sur le coût marginal d'extraction.

3.1.3 Impact de m sur le partage stationnaire de la VA

L'abondance relative de la ressource matérielle affecte évidemment le partage de la valeur ajoutée entre ses 3 composantes. A l'équilibre stationnaire, les parts distributives des facteurs s'écrivent respectivement comme suit (cfr. Annexe 7.6.4) :

$$\text{PRVA} = \alpha - \varphi s u = \alpha \frac{[\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)}{[\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E) + \bar{\varphi} s} \leq \alpha \quad (59)$$

$$\text{PKVA} = 1 - \alpha + \frac{[1 + \rho]^{1-\sigma}}{\beta^\sigma} s \quad (60)$$

$$\text{PSVA} = \alpha \frac{\bar{\varphi} s}{[\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E) + \bar{\varphi} s} - \frac{[1 + \rho]^{1-\sigma}}{\beta^\sigma} s \quad (61)$$

Vu que $G'(E) > 0$, la PRVA est une fonction croissante du taux d'extraction de la ressource; elle décroissante dans le taux d'épargne. La PKVA est une fonction croissante du taux d'épargne macroéconomique; elle dépend positivement ou négativement du taux de rendement de l'épargne selon que σ est inférieure ou supérieure à l'unité. L'expression de la part stationnaire du travail dans la valeur ajoutée (PSVA) est le complémentaire de PRVA+PSVA.

De ce qui précède, on sait que $dm > 0$ implique $dE < 0$ et $ds < 0$ de sorte que l'effet d'une hausse de m sur la PRVA semble *a priori* ambigu. On peut cependant formuler la proposition suivante:

Proposition 3 :

1. Si le taux d'extraction de la ressource n'est pas trop élevé c'est-à-dire si

$$E \leq \frac{2s + \frac{1+\phi_{h'}}{\eta} - 1}{s + \frac{1+\phi_{h'}}{\eta}} \quad \text{avec} \quad \phi_{h'} = \hat{q} \frac{h''(\hat{q})}{h'(\hat{q})} \geq 0, \quad (62)$$

la part de la rente de la valeur ajoutée est une fonction décroissante de l'abondance relative de la ressource: $d\text{PRVA}/dm < 0$.

2. Si $\sigma \leq 1$, une plus grande abondance de la ressource réduit la part du capital dans la valeur ajoutée et, sous réserve que E satisfasse (62), accroît la part du travail dans la valeur ajoutée: $d\text{PKVA}/dm < 0$ et $d\text{PSVA}/dm > 0$.

Il en va aussi nécessairement ainsi pour σ supérieur et dans le voisinage de 1.

Preuve: Le point (1) est démontré dans l'annexe 7.6.5. Le point (2) découle de la Proposition 1 et de (60): s et ρ sont plus faibles quand m est plus élevé ce qui, lorsque $\sigma \leq 1$, implique aussi une valeur plus faible de la PKVA et donc une valeur inévitablement plus élevée de la PSVA (puisque PKVA et PRVA sont toutes deux plus faibles). Lorsque $\sigma > 1$, la baisse de s et celle de ρ ont des effets contradictoires sur la PKVA. Mais par continuité et dans un voisinage de 1, cet effet positif de la baisse ρ sur la PKVA ne peut certainement pas l'emporter sur

l'effet négatif de la baisse de s puisque ds/dm et (donc $d\hat{q}/dm$ et) $d\rho/dm$ sont finies en $\sigma = 1$.

■

Comme le montre l'annexe 7.6.5, la condition (62) n'est qu'une condition largement suffisante à la validité du résultat (1) de la proposition. Cette condition suffisante est d'autant moins restrictive que s est élevé (et devient même totalement superflue lorsque $s \geq 1/2$).

Au vu du Lemme 1 et de la Proposition 2, la part du loyer du capital dans la valeur ajoutée est inévitablement une fonction négative de l'abondance de la ressource lorsque $\sigma \leq 1$ puisque celle-ci n'affecte pas \tilde{k} et qu'elle baisse v (ou le laisse inchangé si $\sigma = 1$) alors qu'elle stimule \tilde{y} : $v\tilde{k}/\tilde{y}$ (ou encore vk/y) diminue donc nécessairement quand m augmente. Il en va encore nécessairement ainsi si v n'augmente pas trop, c'est-à-dire s'il augmente proportionnellement moins que \tilde{y} .

L'abondance de la ressource profite donc généralement au facteur travail. Il en va nécessairement ainsi dans tous les cas où la PKVA baisse mais aussi dans les cas où la PKVA augmenterait proportionnellement moins que ne baisse la PRVA (puisque la conclusion que la PSVA est plus élevée quand m l'est demeure aussi longtemps que $PKVA + PSVA$ est plus faible).

3.2 Analyse du cas général

Dans le cas général où le rapport capital/travail diffère selon les activités, l'obtention de résultats analytiques n'est pas aisée. En particulier, \tilde{k} dépend maintenant de m mais le lien entre le niveau de \tilde{k} et le niveau de m ne peut être établi analytiquement: il est possible que \tilde{k} augmente ou baisse si m varie.

Plusieurs des résultats obtenus par l'analyse formelle menée dans le cas (49) ont toutefois une certaine généralité. En effet, dans tous les cas où \tilde{k} augmente moins que \tilde{y} (ce qui couvre aussi les cas où \tilde{k} diminue), le taux d'épargne baisse, les résultats des Propositions 1 et 2 restent corrects et leur explication intuitive demeure inchangée. L'analyse numérique du cas général¹³ n'a d'ailleurs pas permis d'identifier de configuration paramétrique où une valeur plus élevée de m aurait conduit à une valeur plus élevée du taux d'épargne. Les propositions 1 et 2 établies dans le cas particulier n'ont donc pas pu être invalidées par l'analyse numérique du cas général.

Si dans les analyses numériques, les différentes variables ($E, s, \hat{q}, \rho, \tilde{y}, \tilde{c}, w$) évoluent bien de façon monotone en fonction de m (à la hausse ou à la baisse selon les propositions 1 et 2), ces évolutions ne sont toutefois pas linéaires. A titre d'exemple, la Figure 1 montre que la production est beaucoup plus sensible à M pour des valeurs faibles de M que pour des valeurs élevées de M . Au contraire, pour des valeurs de plus en plus faibles du stock relatif de ressource, on observe des valeurs fortement croissantes de E et de \hat{q} car le coût marginal d'extraction (proportionnel à $1/(1-E)$) explose. Un faible niveau du stock se traduit donc par des coûts d'extraction très élevés, ne permettant qu'une activité économique limitée, en particulier en termes de production de biens. L'incitation à investir dans la recherche de façon à obtenir des gains de qualité est d'autant plus forte que la matière disponible pour la production de biens est faible.

Les simulations confirment que selon les cas, \tilde{k} peut être une fonction croissante ou décroissante de m . Le rapport k_r/k est par contre une fonction décroissante de m : l'effet de la baisse de \hat{q} l'emporte sur celui lié à la hausse de \tilde{y} . Mais le rapport k_e/k se révèle une fonction non monotone de m dans le cas général. La Figure 1.2 illustre l'évolution des rapports k_z/k ($z = f, r, e$) dans le cadre d'une simulation où k est décroissant. Cette simulation est caractérisée par le fait que le rapport travail/capital est plus élevé dans l'activité de production que dans la recherche et l'exploitation de la RN ($\underline{\lambda}_f > \underline{\lambda}_r, \underline{\lambda}_e$). Si M augmente, il y a réallocation du capital des activités de recherche et d'exploitation vers la production. Comme celle-ci est plus intensive en travail et que l'offre de main d'oeuvre est fixe, la réallocation du capital ne peut que se traduire par une baisse du capital total.

¹³L'exercice a consisté à faire varier M sur un large intervalle autour de sa valeur de référence, et cela dans de multiples configurations de valeurs des autres paramètres du modèle. Comme L est fixé, faire varier M est évidemment équivalent à faire varier m .

Figure 1.1: Impact stationnaire de M sur y à L donné

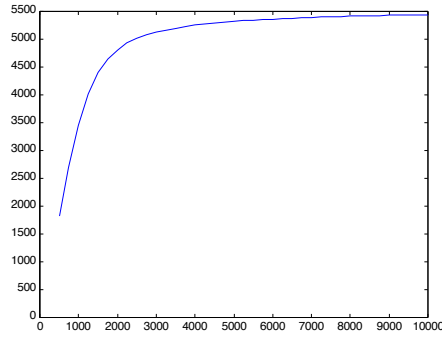
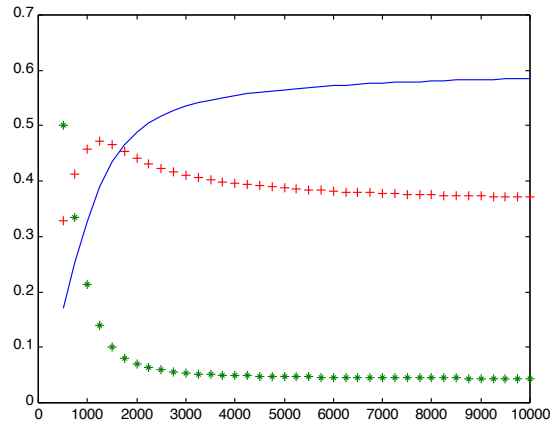


Figure 1.2: Impact stationnaire de M sur l'affectation du capital à L donné
 k_f/k (-), k_r/k (*), k_e/k (+)



Les simulations confirment encore que p_x peut être une fonction croissante ou décroissante de m , comme évoqué dans la proposition 2.

Enfin, l'analyse numérique n'a pas permis d'invalider la proposition 3.

4 Analyse de la dynamique

Vu la complexité du modèle, l'analyse de sa dynamique s'est faite numériquement. Le modèle étant très schématique, les valeurs numériques des variables simulées n'ont guère d'intérêt en elles-mêmes et l'attention portera surtout sur l'allure générale de leur trajectoire. Rappelons en outre que notre exercice se veut prospectif (puisque l'économie décrite ici n'utilise qu'une ressource renouvelable): notre intention n'est donc pas de reproduire des faits ou régularités historiques relatifs au partage de la valeur ajoutée¹⁴.

¹⁴En particulier, nous ne cherchons pas à ce que la dynamique transitoire du modèle arbore une relative stabilité du partage de la valeur ajoutée, ce qui est encore souvent considéré comme un "fait stylisé" de la croissance moderne. D'aucuns contestent toutefois la validité de ce constat. Voir notamment Solow (1958), Krämer (2010) et Young (op citum).

4.1 Convergence vers son sentier stationnaire d'une économie initialement sous-capitalisée

Le premier exercice numérique illustre le sentier de croissance d'une économie dont l'état initial est caractérisé par un stock de capital sensiblement inférieur à son niveau stationnaire et par des perspectives de progrès technique encore très importantes: les valeurs initiales λ_{z0} , χ_0 , μ_0 , κ_0 et φ_0 des variables λ_{zt} , χ_t , μ_t , κ_t et φ_t sont encore loin de leurs valeurs limites. La population (l'offre de travail) et le stock de matière sont exogènes et constants (comme toutes les autres exogènes du modèle).

Le niveau de production matérielle y_o est donc bien en dessous de son niveau stationnaire et les moteurs de croissance de l'économie sont initialement multiples: l'investissement en capital physique, l'amélioration de la productivité du capital et du travail, la réduction de la dépendance de la production finale envers la ressource, l'amélioration de qualité des productions finales.

La Figure 2.1 illustre la trajectoire de la production matérielle (en bleu): elle augmente de façon monotone et tend vers un niveau stationnaire pour les raisons que nous avons expliqué dans l'analyse théorique: sur plusieurs dimensions (l'amélioration de la productivité du travail et du capital, la réduction de la dépendance de la production envers la ressource), le progrès technique est borné et une fois que les variables λ_{zt} , χ_t , μ_t , κ_t atteignent leur niveau stationnaire $\underline{\lambda}_z$, $\underline{\chi}$, $\underline{\mu}$, $\underline{\kappa}$, la croissance de la production matérielle s'éteint. Seule demeure une croissance qualitative ($\hat{q} > 1$ comme l'illustre la Figure 2.4).

La Figure 2.2 montre que le taux d'épargne décroît de façon monotone jusqu'à son niveau stationnaire. Comme on part d'une valeur initiale du capital très inférieure à son niveau de long terme, celui-ci agit au début de la trajectoire comme le facteur limitant le plus l'économie, au contraire de la population et de la ressource qui sont relativement abondantes. L'incitation à la croissance du capital et de la production matérielle est alors très forte, ce qu'illustrent des valeurs élevées du taux d'épargne. Progressivement, avec la croissance de l'économie, le capital devient moins rare et sa rémunération décroît avec le désir d'épargner.

Figure 2.1: Output matériel

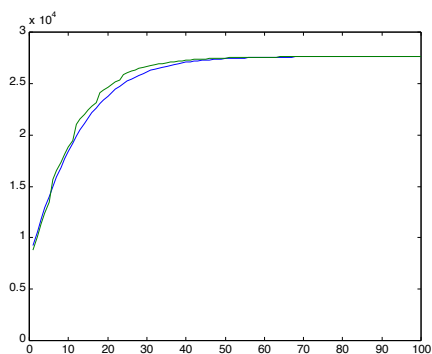
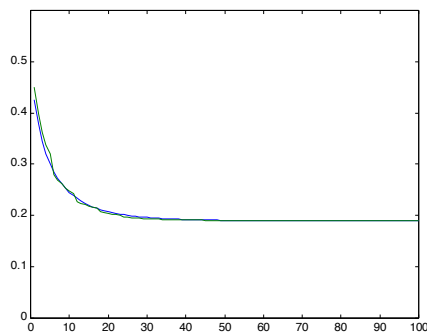


Figure 2.2: Taux d'épargne



Dans une telle simulation, le taux d'extraction de la ressource subit deux influences en sens contraire. D'une part, le progrès technique rend le processus productif moins dépendant de la ressource ($\chi_t + \mu_t$ diminue), ce qui tend à réduire l'extraction toute autre chose égale par ailleurs. D'autre part, la croissance matérielle alimentée par l'accumulation du capital et les différentes formes de progrès technique (y compris la baisse de $\chi_t + \mu_t$) tend à augmenter les besoins en ressource et l'intensité de l'extraction: E_t augmente du fait de la hausse de la matière extraite liée à la hausse de la production et du fait de la baisse de R_t (due à l'accumulation de matière dans le capital installé)¹⁵. Sauf à supposer un potentiel de dématérialisation très important (c'est-à-dire des valeurs très faibles de $\underline{\chi}$ et $\underline{\mu}$), le second des deux effets décrits ci-dessus l'emporte sur le

¹⁵Cet effet-ci joue cependant peu dans le cadre de la simulation étudiée. En effet, la matière contenue dans le capital change très peu, l'accumulation de matière dans le capital étant contrecarrée par la dématérialisation de la production et du capital (à travers la baisse du coefficient μ_t). R_t baisse donc peu.

premier et le taux d'extraction croît pendant la phase de croissance de la production matérielle comme l'illustre en bleu la Figure 2.3¹⁶. La hausse des coûts d'extraction qui accompagne la croissance de E_t contraint de plus en plus la dimension matérielle et quantitative de la croissance économique qui finit par être nulle comme nous l'avons vu.

Figure 2.3: Taux d'extraction E_t

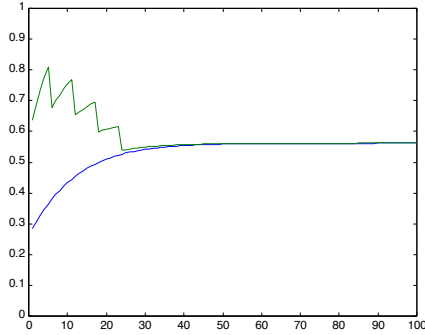
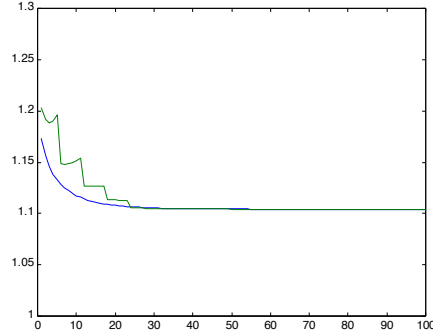


Figure 2.4: \hat{q}_t



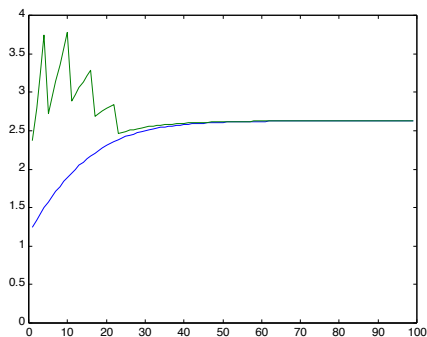
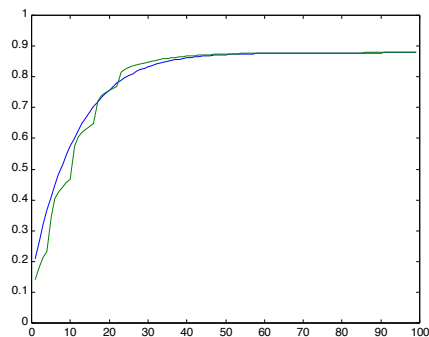
La Figure 2.4 montre le taux de croissance de la qualité, seule source de croissance durable dans le modèle. Il s'identifie avec un délai d'une période avec le taux de progrès technique au niveau des différentes activités. Dans la simulation considérée ici (en bleu), c'est une fonction décroissante du temps: le capital étant le facteur limitant en début de trajectoire, il bride le nombre de biens pouvant être fabriqués. L'incitation à investir dans la recherche de façon à accroître la qualité de ces biens est alors forte, les gains de qualité les plus élevés s'observant en début de simulation. Faisons remarquer qu'une évolution non monotone est possible dans certaines configurations paramétriques, le facteur de croissance \hat{q}_t pouvant remonter avec l'extinction de la croissance matérielle.

Les Figures 2.5 et 2.6 montrent l'évolution globalement croissante du salaire réel et du prix réel de la ressource dans la simulation considérée ici. Au fur et à mesure que l'économie se développe, la demande de ces deux facteurs augmente, poussant leur prix réel vers le haut. L'évolution de la demande relative de la ressource et du travail dépend toutefois du potentiel de progrès technique qui les affectent le long de la dynamique transitoire: l'évolution relative du salaire réel par rapport à la rente en dépend donc elle-aussi¹⁷.

Les évolutions respectives de la part de la rente et de la part de salaires dans la valeur ajoutée sont décrites aux Figures 2.7 et 2.8: elles traduisent, dans le scénario considéré ici la raréfaction relative des facteurs travail et matière au fur et à mesure que l'économie se développe (alors qu'au début de la simulation, c'est le capital qui est le facteur limitant). L'examen de (38) montre que la PRVA subit des pressions contradictoires pendant la dynamique transitoire. D'une part, la dématérialisation croissante de la production tend à la réduire, ceci d'autant plus qu'elle tendrait également à réduire p_{xt} et E_t toutes autres choses égales par ailleurs. D'autre part, la croissance de la production matérielle issue de l'accumulation du capital et des différentes formes de progrès techniques stimule la demande pour la ressource et pousse E_t et p_{xt} à la hausse. Sauf à supposer un potentiel de dématérialisation très important, le second des deux effets l'emporte sur le premier le long de la dynamique transitoire et la PRVA évolue de façon croissante comme illustré ici.

¹⁶Dans la simulation proposée ici, le potentiel de dématérialisation est d'un tiers: $\underline{\chi} + \underline{\mu} = 2/3(\chi_0 + \mu_0) = 0.07$. A valeur inchangée des autres paramètres, il faut un potentiel de dématérialisation deux fois plus important $\underline{\chi} + \underline{\mu} < 1/3(\chi_0 + \mu_0) = 0.035$ pour voir une tendance globalement baissière du taux d'extraction le long de la transition.

¹⁷Rappelons toutefois que l'évolution du prix de la ressource est liée à celle du coût d'utilisation du mixte capital-travail dans l'activité d'extraction (u_{xt}) et celle du taux d'extraction: $p_{xt} = u_{xt}/(1 - E_t)$. Lorsque le potentiel de dématérialisation de la production est suffisamment fort pour que E_t chute le long de la dynamique transitoire (voir note infrapaginale précédente), le prix de la ressource peut éventuellement chuter (mais il n'en va pas nécessairement ainsi car u_{xt} augmente par ailleurs).

Figure 2.5: Rente p_{xt} Figure 2.6: Salaire réel w_t 

La Figure 2.8 montre que la part des salaires dans la valeur ajoutée suit également une évolution monotone croissante¹⁸. Dans certains cas toutefois, la croissance de la PSVA est susceptible d'être contrecarrée par celle de PRVA. Comme nous l'avons dit plus haut, l'évolution relative du salaire réel et de la rente dépend du potentiel de progrès technique susceptible d'affecter chacun deux facteurs. Si le potentiel de dématérialisation de la production finale est (en termes relatifs) faible de sorte le taux d'extraction de la ressource croît vers une valeur élevée le long de la dynamique transitoire, la phase d'extinction de la croissance matérielle s'accompagne d'une hausse relativement plus forte de la rente (que des salaires) et la PSVA connaît alors une évolution en forme de bosse.

Figure 2.7: Part de la rente

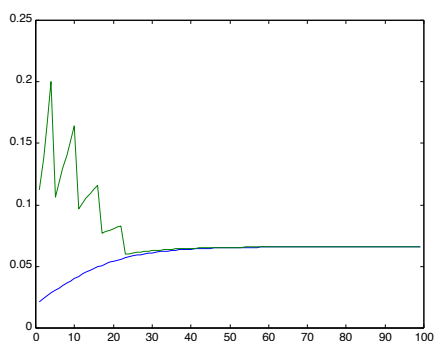
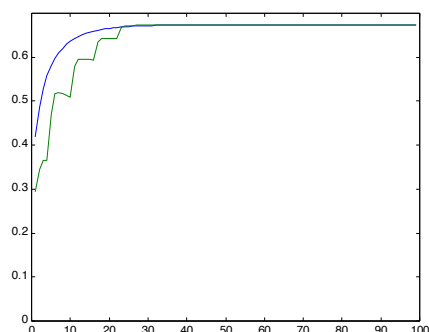


Figure 2.8: Part des salaires



4.2 Découvertes de gisements de RN

La Figure 2.5 (resp. 2.7) montre en bleu une évolution monotone croissante du prix réel de la ressource (resp. de la PRVA). Or celles-ci ne correspondent pas à la baisse tendancielle des prix réels des ressources et de la part de la rente qui a caractérisé l'industrialisation des pays occidentaux (Hill, 2001). Il faut évidemment être prudent dans la lecture des évolutions issues des simulations considérées ici si l'on cherche à établir des comparaisons avec des évolutions historiquement observées ces 2 derniers siècles. En effet, l'économie du modèle n'utilise que des ressources recyclables et sa croissance ne repose en rien sur l'utilisation de ressources non renouvelables, contrairement à ce qui a été largement le cas ces 2 derniers siècles. Néanmoins, on peut se poser la question de savoir comment évolue le prix de la ressource et la part de la rente lorsque la ressource disponible n'est que progressivement découverte.

¹⁸Cette tendance découle de nos hypothèses technologiques et du type de simulation considérée (l'économie est initialement sous-capitalisée): les possibilités de substitution entre travail et capital étant limitées, l'accumulation du capital et la croissance économique qui en découle s'accompagnent d'une hausse de la part des salaires dans la valeur ajoutée.

Alors que la simulation précédente considère que le stock *total* de RN est accessible dès le début, nous considérons une simulation alternative où seule une fraction du stock de ressource est initialement disponible, le reste devenant progressivement exploitable suite à une séquence de découvertes intervenant à intervalles réguliers. A l'issue du processus de découvertes, l'économie dispose du même stock de ressources que dans la simulation initiale. Les valeurs des autres exogènes sont par ailleurs parfaitement identiques dans les deux simulations et les deux économies ont le même état stationnaire. Les courbes en vert sur les figures précédentes montrent la trajectoire des variables simulées dans ce scénario de découvertes progressives. Les évolutions en dents de scie découlent de l'apparition soudaines de découvertes.

Comme on le voit dans la Figure 2.1 (resp. 2.2), l'évolution de la production matérielle (resp. de l'épargne) est similaire dans les deux simulations. Ceci est la conséquence que c'est le capital qui est initialement le facteur le plus limitant, de sorte que la moindre disponibilité initiale de la ressource affecte finalement peu la production matérielle. Toutefois, l'incitation à investir en qualité est plus forte dans l'économie moins bien dotée en ressources matérielles (Figure 2.4).

Les trajectoires initiales du taux d'extraction, du prix réel de la ressource et de la PRVA sont très différentes de celles de la simulation initiale. Dans le cas de la variante avec découvertes, la rente (Figure 2.5) et la PRVA (Figure 2.7) démarrent avec des valeurs très supérieures à celles du cas de référence car le stock de matière est plus réduit. A chaque découverte d'un nouveau gisement, le stock augmente et la rente et la PRVA subissent un choc vers le bas. Entre deux découvertes, la rente et la PRVA repartent à la hausse à cause de l'augmentation de la demande induite par la croissance économique. Ces chocs suffisent pour engendrer une évolution *tendantiellement* décroissante de la PRVA pendant la phase des découvertes. Dès lors que les découvertes s'arrêtent, la PRVA recommence à croître de façon monotone vers sa valeur d'équilibre. Selon la configuration des paramètres, la tendance que suit le prix de la ressource (au travers de son évolution en dents de scie) peut être en forme de bosse comme dans la simulation proposée ici, ou croissante (lorsque la valeur de long terme de la PSVA est élevée).

Même si les courbes décrivant l'évolution des salaires réels et de la PSVA (Figures 2.6 et 2.8) affichent la même tendance dans 2 simulations, les écarts relatifs sont importants pendant les premières phases de découvertes, les salaires et la PSVA étant plus bas dans l'économie initialement moins bien dotée en ressources. Chaque épisode de découvertes profite chaque fois au salaire et à la PSVA.

La comparaison entre les niveaux de la PRVA et de la PSVA dans les 2 simulations montrent que la plus grande PRVA pendant la première partie de la trajectoire de l'économie initialement moins bien dotée en ressource est obtenue essentiellement au dépend de la PSVA: le problème de plus grande rareté de la ressource dans l'économie initialement moins dotée affecte essentiellement le partage de la valeur ajoutée entre travailleurs et propriétaires des ressources.

4.3 Effet d'une pression démographique plus ou moins forte

Dans le jeu de simulation qui suit, nous étudions les conséquences de la pression démographique. Nous considérons deux économies initialement identiques en tout point et qui connaissent une croissance démographique et des découvertes progressives de ressources. Dans les deux économies, la croissance démographique se poursuit au delà de la fin des découvertes mais la population d'une des deux économies (la bleu dans les figures) se stabilise avant celle de l'autre (la verte dans les figures). Avec une valeur stationnaire de la population plus grande (50% de plus), l'économie verte a donc une valeur stationnaire du ratio m plus petite: par rapport au travail, la contrainte de ressource est donc relativement plus sévère dans l'économie verte.

La valeur plus élevée de L permet à l'économie verte d'atteindre un niveau de production matérielle plus élevée que dans l'économie bleue (Figure 3.1) mais cela implique évidemment un taux d'extraction de la ressource plus élevé (Figure 3.2). La plus forte augmentation de L pour une même valeur stationnaire de M implique toutefois une augmentation de la production matérielle proportionnellement moindre que celle de l'emploi.

Conformément à l'analyse de la section 3, la valeur plus faible de m dans l'économie verte

implique des valeurs stationnaires plus élevées du taux d'épargne et des gains de qualité (Figures 3.3 et 3.4). Dans l'économie verte, la pression démographique plus forte renforce l'incitation à rechercher des gains de qualité et est responsable d'une évolution non monotone de \hat{q}_t .

Figure 3.1: Production matérielle

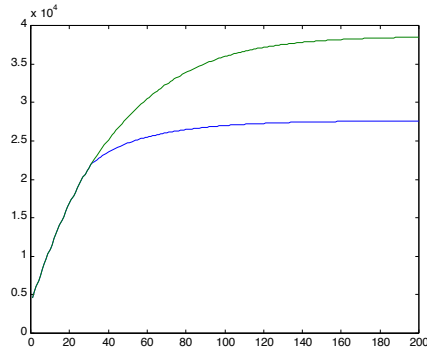


Figure 3.3: Taux d'épargne

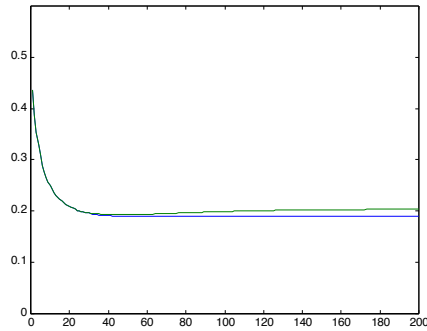


Figure 3.5: Rente

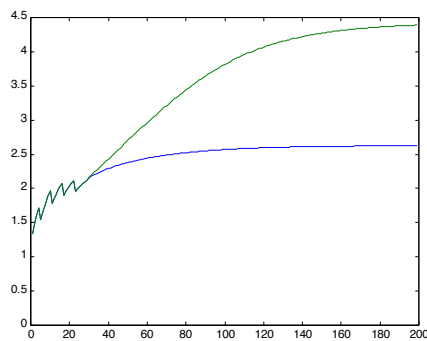


Figure 3.2: Taux d'extraction E_t

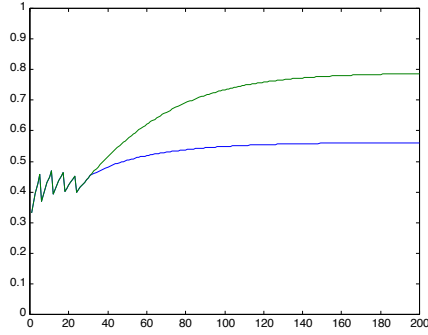


Figure 3.4: \hat{q}_t

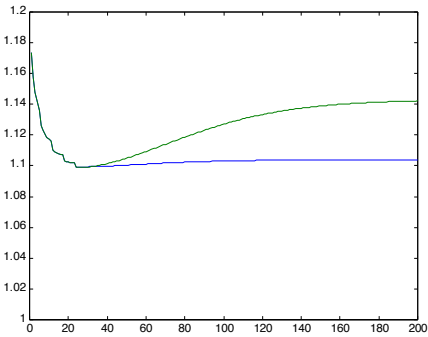
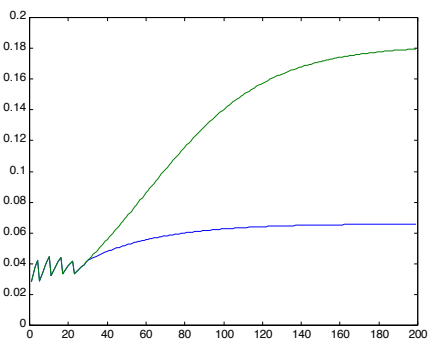


Figure 3.6: PRVA



La rente et la part de la rente dans la valeur ajoutée augmente davantage dans l'économie où la pression démographique sur la ressource est plus forte (Figures 3.5 et 3.6). Cette augmentation plus forte de la rente finit par peser sur l'évolution des salaires et celles de la PSVA (Figures 3.7 et 3.8) qui suivent une évolution en cloche dans l'économie concernée par la plus forte croissance démographique. Comme dans l'exercice 4.2, le conflit distributif autour du partage de la valeur ajoutée se joue essentiellement entre propriétaires des ressources et salariés.

Figure 3.7: Salaire réel

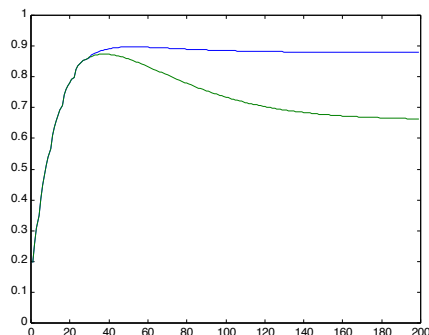
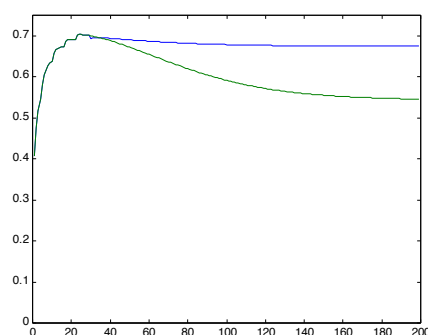


Figure 3.8: PRVA



5 Conclusion

Dans un modèle de croissance endogène avec une ressource naturelle de matière (naturellement recyclable), nous avons étudié comment la rareté de la ressource affecte la trajectoire de croissance de l'économie, la rente liée à l'utilisation de la ressource et le partage fonctionnel de la valeur ajoutée. Une particularité de notre modèle est de reposer sur le concept de soutenabilité forte qui traduit le fait que, pour des raisons physiques, le progrès technique et/ou la substitution entre facteurs naturels et facteurs produits sont limités. En conséquence, la productivité de la ressource est nécessairement bornée. Il en découle qu'une croissance quantitative (en termes du nombre de biens) ne peut être qu'un phénomène transitoire et que seule une croissance qualitative (en termes de qualité des biens) indéfinie est possible.

Nous avons tout d'abord étudié l'impact de la rareté de la ressource sur les caractéristiques du sentier de croissance stationnaire. Comme les ménages valorisent la consommation matérielle, l'abondance relative de la ressource conduit à un niveau stationnaire plus élevé de la production matérielle par tête. Il s'en suit également une baisse du rendement de l'épargne, du taux d'épargne et du taux de croissance de la qualité des productions, une économie mieux dotée en ressource investissant *in fine* moins en recherche. Par ailleurs, la plus grande abondance de la ressource modifie le partage de la valeur ajoutée à l'avantage du facteur travail: avec une ressource plus abondante, part de la rente dans la valeur ajoutée (PRVA) et part du capital sont plus faibles alors que salaire et part des salaires dans la valeur ajoutée (PSVA) sont plus élevés (à tout le moins si l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation n'est pas trop supérieure à 1). *A contrario*, un niveau plus faible de ressource par tête (ce qui pourrait résulter d'un niveau stationnaire de population plus élevé) modifiera le partage de la valeur ajoutée au détriment du facteur travail.

L'analyse de la dynamique du modèle s'est focalisée sur le sentier de croissance d'une économie dont l'état initial est caractérisé par un stock de capital sensiblement inférieur à son niveau stationnaire et par des perspectives de progrès techniques importantes. Les simulations numériques montrent que la production matérielle augmente alors de façon monotone et tend vers un niveau stationnaire. Comme la valeur initiale du capital est très inférieure à son niveau de long terme, celui-ci agit au début de la trajectoire comme le facteur limitant le plus l'économie, au contraire de la population et de la ressource qui sont relativement abondantes. Vu sa rareté, l'incitation à l'accumulation du capital est forte, ce qu'illustrent des valeurs élevées du taux d'épargne. Progressivement, avec la croissance de l'économie, le capital devient moins rare et sa rémunération décroît. Au contraire, il y a raréfaction relative des facteurs travail et matière.

Si le stock de ressource disponible est connu et accessible dès l'état initial, la PRVA évolue de façon croissante tout au long de la dynamique transitoire, sauf à supposer un potentiel de dématérialisation extrême. Pour de nombreuses configurations de paramètres, il en va de même

pour la PSVA. Toutefois, lorsque le niveau stationnaire de la PRVA est élevé, les simulations montrent que le conflit distributif entre propriétaires de la ressource et travailleurs se marque davantage le long de la dynamique transitoire: la croissance de la PSVA est contrecarrée par celle de la PRVA et connaît une évolution non monotone (c-à-d en forme de cloche). La tendance vers la "croissance zéro" (au sens matériel du terme) qui caractérise l'achèvement de la dynamique transitoire ne profite alors plus qu'aux propriétaires de la ressource. C'est notamment ce qui peut se produire lorsque la dynamique transitoire s'accompagne d'une pression démographique forte.

Si le stock de ressource naturelle n'est pas entièrement découvert au départ, les simulations montrent que des découvertes successives peuvent engendrer une évolution tendancielle décroissante de la PRVA pendant la phase des découvertes. Dès lors que celles-ci cessent, la PRVA recommence à croître de façon monotone vers sa valeur d'équilibre.

Ces simulations confirment donc la "conjecture de Ricardo" (à savoir la hausse tendancielle de la part de la rente dans la VA) pour une économie qui respecte le postulat de soutenabilité forte. On y observe, tôt ou tard, un ralentissement de la croissance (au sens matériel du terme) qui n'empêche pas la hausse de la PRVA vers sa valeur stationnaire. Ceci suggère que la baisse observée historiquement de la PRVA pourrait s'inverser dans le futur, dès lors que les processus de découvertes successives de nouvelles réserves et de dématérialisation de la production sont limités.

Le modèle développé dans cet article est susceptible de différents développements qui permettraient de tester la validité des résultats obtenus dans un cadre plus riche. Trois pistes de recherche méritent en particulier d'être mentionnées. La première concerne l'endogénéisation de la population, et en particulier celle de la transition démographique. La deuxième concerne l'introduction de ressources naturelles non renouvelables. Si celles-ci ne peuvent évidemment pas jouer de rôle à long terme, leur épuisement progressif est en revanche susceptible d'affecter le partage de la valeur ajoutée pendant la phase transitoire, et en particulier d'exacerber le conflit distributif durant celle-ci. Enfin, à la manière de Kaldor (op citum), on pourrait considérer un modèle où les individus ont une pension à épargner qui dépend de leurs sources (et niveaux) de revenus et où la distribution fonctionnelle du revenu national a donc des conséquences macroéconomiques supplémentaires.

6 Bibliographie

Anderson (1987)., "The production process : inputs and wastes", *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, 1-12.

Askenazy P., G. Clette et A. Sylvain (2011), *Le partage de la valeur ajoutée*, La Découverte.

Assous M. (2011), "Qu'a-t-on appris sur la répartition du revenu en macro-économie depuis les années de haute théorie ?", Présentation, *Cahiers d'économie Politique*, 61, 7-18.

Atkinson A. (2009), "Factor shares : the principal problem of political economy ?", *Oxford Review of Economic Policy*, 25(1), 3-16.

Baumgärtner S. (2004), "The Inada conditions for material resource inputs reconsidered", *Environmental and Resource Economics*, 29, 307-322.

Bentolila S. et G. Saint-Paul (2003), "Explaining Movements in the Labor Share", *Contributions to Macroeconomics*, Vol. 3(1), Art. 9.

Dixit A. et J. Stiglitz (1977), "Monopolistic competition and optimum product diversity", *American Economic Review*, 67(3), 297-308.

Fagnart J.-F. et M. Germain (2011), "Quantitative versus qualitative growth with recyclable resource", *Ecological Economics*, 70(5), 929-941.

Krämer H. (2010), “The Alleged Stability of the Labour Share of Income in Macroeconomic Theories of Income Distribution”, IMK Working Paper 11/2010.

Hill G. (2001), “The Immiseration of the Landlords: Rent in a Kaldorian theory of income distribution”, *Cambridge Journal of Economics*, 25, 481-492.

Kaldor N. (1956), “Alternative theories of distribution”, *Review of Economic Studies*, 23, 83-100.

Kalecki M. (1938), “The determinants of distribution of the national income”, *Econometrica*, 6(2), 97-112.

Krysiak F. (2006), “Entropy, limits to growth, and the prospects for weak sustainability”, *Ecological Economics*, 58(1), 182-191.

Ricardo D. (1817), *Des principes de l'économie politique et de l'impôt*, collection: ‘Les classiques des sciences sociales’,

http://www.uqac.quebec.ca/zone30/Classiques_des_sciences_sociales/index.html

Solow R. (1958), “A Skeptical Note on the Constancy of Relative Shares”, *American Economic Review*, vol. 48, 618-631

Young A. (2011), “One of the things we know that ain't so: why US labor share is not relatively stable”, *Journal of Macroeconomics*, 32, 90-102.

Zuleta H. et A. Young (2013), “Labor Shares in a Model of Induced Innovation”, *Structural Change and Economic Dynamics*, 24, pp. 112-122.

7 Annexe

7.1 Demandes de biens finaux

On dérive ici les demandes de biens finaux à destination de la consommation (les demandes de biens d'équipement se dérivent de façon similaire). Pour un niveau donné de l'indice de consommation C_t , le ménage choisit son vecteur de biens de consommation ($c_{it}, i \in [0, 1]$) de façon à minimiser son coût :

$$\min_{c_{it}} \int_0^1 p_{it} c_{it} di \quad \text{s.c.q.} \quad C_t = \left[\int_0^1 [\psi(q_{it}) c_{it}]^\alpha di \right]^{1/\alpha}$$

Le Lagrangien du problème s'écrit :

$$\mathcal{L}_t = \int_0^1 p_{it} c_{it} di + \nu_t \left[\left[\int_0^1 [\psi(q_{it}) c_{it}]^\alpha di \right]^{\frac{1}{\alpha}} - C_t \right]$$

où ν_t est le multiplicateur associé à la contrainte.

La condition du premier ordre relative au bien i conduit à :

$$\begin{aligned} p_{it} &= \nu_t \frac{1}{\alpha} \left[\int_0^1 [\psi(q_{it}) c_{it}]^\alpha di \right]^{\frac{1}{\alpha}-1} \alpha [\psi(q_{it}) c_{it}]^{\alpha-1} \psi(q_{it}) \\ &= \nu_t C_t^{1-\alpha} \psi^\alpha(q_{it}) c_{it}^{\alpha-1} \end{aligned} \quad (63)$$

En multipliant la dernière égalité par c_{it} , on obtient

$$p_{it} c_{it} = \nu_t C_t^{1-\alpha} [\psi(q_{it}) c_{it}]^\alpha$$

La sommation sur i de cette dernière expression implique :

$$\int_0^1 p_{it} c_{it} di = \nu_t C_t^{1-\alpha} \int_0^1 [\psi(q_{it}) c_{it}]^\alpha di = \nu_t C_t^{1-\alpha} C_t^\alpha = \nu_t C_t$$

Le multiplicateur se confond avec l'indice de prix P_{ct} associé au vecteur de biens de consommation défini implicitement par $P_{ct} C_t = \int_0^1 p_{it} c_{it} di$. En conséquence, (63) implique :

$$c_{it} = \psi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(q_{it}) \left[\frac{p_{it}}{P_{ct}} \right]^{-\frac{1}{1-\alpha}} C_t \quad \text{avec} \quad c_{it} = \psi^{\varepsilon-1}(q_{it}) \left[\frac{p_{it}}{P_{ct}} \right]^{-\varepsilon} C_t \quad (64)$$

où $\varepsilon = 1/[1 - \alpha]$.

En substituant c_{it} par son expression (64) dans $P_{ct} C_t = \int_0^1 p_{it} c_{it} di$, on obtient l'expression de l'indice vrai des prix à la consommation:

$$\begin{aligned} P_{ct} C_t &= \int_0^1 p_{it} \psi^{\varepsilon-1}(q_{it}) \left[\frac{p_{it}}{P_{ct}} \right]^{-\varepsilon} C_t di \\ &\Rightarrow P_{ct}^{1-\varepsilon} = \int_0^1 \psi^{\varepsilon-1}(q_{it}) [p_{it}]^{1-\varepsilon} di \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression donnée dans (11).

Un raisonnement est identique peut être reproduit pour la demande d'investissement en bien i

$$d_{it} = \varphi^{\varepsilon-1}(q_{it}) \left[\frac{p_{it}}{P_{kt}} \right]^{-\varepsilon} k_{t+1}$$

et l'indice vrai des prix à l'investissement donné dans (11).

La demande totale de bien i est donc

$$\begin{aligned} y_{it} &= c_{it} + d_{it} \\ &= \psi^{\varepsilon-1}(q_{it}) \left[\frac{p_{it}}{P_{ct}} \right]^{-\varepsilon} C_t + \varphi^{\varepsilon-1}(q_{it}) \left[\frac{p_{it}}{P_{kt}} \right]^{-\varepsilon} k_{t+1} \end{aligned} \quad (65)$$

L'élasticité prix de la demande vaut donc $-\varepsilon$. En outre

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{it}}{\partial q_{it}} &= \frac{\partial c_{it}}{\partial q_{it}} + \frac{\partial d_{it}}{\partial q_{it}} \\ &= [\varepsilon - 1] \psi^{\varepsilon-2}(q_{it}) \psi'(q_{it}) \left[\frac{P_{ct}}{p_{it}} \right]^\varepsilon C_t + [\varepsilon - 1] \varphi^{\varepsilon-2}(q_{it}) \varphi'(q_{it}) \left[\frac{P_{kt}}{p_{it}} \right]^\varepsilon k_{t+1} \\ &= [\varepsilon - 1] \left[\frac{\psi'(q_{it})}{\psi(q_{it})} c_{it} + \frac{\varphi'(q_{it})}{\varphi(q_{it})} d_{it} \right] \end{aligned}$$

Cette expression précédente conduit à (12).

7.2 Prix, qualité, production et demandes de facteurs

Le problème (21) conduit aux conditions du premier ordre pour la période t suivantes :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial p_t} = y_t + \left[p_t - \left[U_{ft} \kappa(Q_{t-1}) + U_{rt} h \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) + P_{xt} [\chi(Q_{t-1}) + \mu(Q_{t-1})] \right] \right] \frac{\partial y_t}{\partial p_t} = 0 \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_t}{\partial q_t} &= \left[p_t - \left[U_{ft} \kappa(Q_{t-1}) + U_{rt} h \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) + P_{xt} [\chi(Q_{t-1}) + \mu(Q_{t-1})] \right] \right] \frac{\partial y_t}{\partial q_t} \dots \\ &\quad - U_{rt} h' \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) \frac{y_t}{Q_{t-1}} = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

En multipliant (66) par p_t/y_t , on obtient:

$$p_t = -\frac{p_t}{y_t} \frac{\partial y_t}{\partial p_t} \left[p_t - \left[U_{f_t} \kappa(Q_{t-1}) + U_{r_t} h \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) + P_{x_t} [\chi(Q_{t-1}) + \mu(Q_{t-1})] \right] \right]$$

ou encore (en utilisant le fait que l'élasticité prix vaut $-\epsilon$ et en réarrangeant les termes),

$$(\epsilon - 1)p_t = \epsilon \left[U_{f_t} \kappa(Q_{t-1}) + U_{r_t} h \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) + P_{x_t} [\chi(Q_{t-1}) + \mu(Q_{t-1})] \right], \quad (68)$$

ce qui est équivalent à (22).

En multipliant (67) par q_t/y_t , on obtient:

$$\left[p_t - \left[U_{f_t} \kappa(Q_{t-1}) + U_{r_t} h \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) + P_{x_t} [\chi(Q_{t-1}) + \mu(Q_{t-1})] \right] \right] \frac{q_t}{y_t} \frac{\partial y_t}{\partial q_t} = U_{r_t} h' \left(\frac{q_t}{Q_{t-1}} \right) \frac{q_t}{Q_{t-1}}.$$

En utilisant (68), on peut réécrire l'expression entre crochet comme p_t/ϵ et on obtient (23).

7.3 La dynamique de la RN

La quantité de RN extraite est vendue aux entreprises du secteur industriel. Pour produire y_t , ce secteur a besoin de la quantité x_t de RN (donnée par (29)), une fraction de la matière ($\mu(q_{t-1})y_t$) étant incorporée dans les biens produits et l'autre ($Z_{f_t} = \chi(q_{t-1})y_t$) se retrouvant sous forme de déchets. Ces biens sont à leur tour vendus aux ménages sous forme de biens de consommation et d'équipement. Les biens de consommation sont consommés immédiatement et contribuent au flux de déchets $Z_{c_t} = \mu(q_{t-1})y_t$ en fin de période t . La matière des biens d'équipement est incorporée dans le stock de capital installé en $t + 1$. En revanche, le stock de capital ayant servi en t est déclassé en fin de période et contribue au flux de déchets $Z_{k_t} = \mu(q_{t-2}) \frac{k_t}{\varphi(q_{t-1})}$ ¹⁹.

Les déchets générés par la consommation, la production et le stock de capital en t sont supposés intégralement et immédiatement recyclés par la Nature, de telle façon qu'ils réintègrent le stock de RN en début de $t + 1$. Vu ce qui précède, la dynamique de la RN s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{t+1} - R_t &= Z_{f_t} + Z_{c_t} + Z_{k_t} - x_t \\ &= \chi(q_{t-1})y_t + \mu(q_{t-1})c_t + \mu(q_{t-2}) \frac{k_t}{\varphi(q_{t-1})} - [\chi(q_{t-1}) + \mu(q_{t-1})] y_t \\ &= -\mu(q_{t-1}) \frac{k_{t+1}}{\varphi(q_t)} + \mu(q_{t-2}) \frac{k_t}{\varphi(q_{t-1})} \end{aligned} \quad (69)$$

où on a fait usage de (31) et (29). Cette équation montre que la quantité $R_t + \mu(q_{t-2}) \frac{k_t}{\varphi(q_{t-1})}$ est constante dans le temps. Soit M cette constante. Alors (69) conduit bien à (37).

7.4 Part des facteurs dans la VA

Vu (9), la part de la rente dans le PIB s'écrit à en t :

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_t}{p_t y_t} &= p_{x_t} \frac{R_t}{y_t} \left[E_t - [1 - E_t] \ln(1 - E_t)^{-1} \right] \\ &= p_{x_t} \frac{\chi_t + \mu_t}{E_t} \left[E_t - [1 - E_t] \ln(1 - E_t)^{-1} \right] \\ &= \frac{u_{e_t}}{1 - E_t} [\chi_t + \mu_t] \left[1 - \frac{1 - E_t}{E_t} \ln(1 - E_t)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

¹⁹ $\frac{k_t}{\varphi(q_{t-1})}$ désigne la quantité totale de biens d'équipement mobilisés pour l'installation de k_t . La matière contenue dans k_t provient donc de ces biens d'équipement. Ceux-ci ayant été fabriqués en $t - 1$, leur masse par unité est $\mu_{t-1} = \mu(Q_{t-2}) = \mu(q_{t-2})$ (étant donné (17) et (??)).

La deuxième égalité découle de (29) et donne (38). La troisième découle de (7) et conduit immédiatement à (39).

En utilisant (21) et (22), on vérifie aisément que la part des profits *purs* (c-à-d hors loyer du capital) dans la valeur ajoutée $p_t y_t$ est une constante:

$$\frac{\Pi_t}{p_t y_t} = 1 - \alpha. \quad (70)$$

Cette propriété découle du fait que l'élasticité-prix de la demande (65) est elle-même constante.

La part totale du capital dans la valeur ajoutée en t vaut alors

$$\begin{aligned} PKVA_t &= \frac{\Pi_t}{p_t y_t} + \frac{V_t k_t}{p_t y_t} = 1 - \alpha + \frac{V_t}{P_{kt-1}} \frac{P_{kt-1} k_t}{p_t y_t} \\ &= 1 - \alpha + [1 + \rho_t] \frac{\psi(q_{t-1})}{\varphi(q_{t-1})\psi(q_t)} \frac{k_t}{y_t} \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de (70) et la troisième de la définition de ρ_t (voir 24) et de (25).

7.5 Réduction du système stationnaire

En utilisant $s =_{def} \tilde{k}/\tilde{\varphi}\tilde{y}$ dans (51), on obtient directement (53). Comme (42) donne $\tilde{R} = [\underline{\chi} + \underline{\mu}] \tilde{y}/E$, (45) implique

$$\frac{m}{\tilde{y}} = \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} + s\underline{\mu} \quad (71)$$

Le rapport entre cette équation et (52) conduit à :

$$m = \frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} + s\underline{\mu}}{\lambda_f \underline{\kappa} + \lambda_r h(\hat{q}) - \lambda_e \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} \ln(1 - E)} \quad (72)$$

Par ailleurs, (46) et (47) impliquent respectivement:

$$\alpha = u_f \underline{\kappa} + u_r h(\hat{q}) + u_e \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1 - E} \quad (73)$$

$$\alpha \eta [1 - s] = u_r h'(\hat{q}) \hat{q} \quad (74)$$

Sous l'hypothèse (49), (72) et (53) impliquent

$$m = \frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} + s\underline{\mu}}{\lambda \left[\underline{\kappa} + h(\hat{q}) - \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} \ln(1 - E) \right]} = \frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{E} + s\underline{\mu}}{\lambda s \tilde{\varphi}}$$

ce qui conduit à (54). Par ailleurs, sous l'hypothèse (49), $u_z = u$: la division membre à membre de (74) par (73) donne

$$\eta [1 - s] = \frac{h'(\hat{q}) \hat{q}}{\underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1 - E}}$$

dont on obtient (55).

7.6 Preuves des Propositions 1 et 2

7.6.1 Signe de $ds, dE, d\hat{q}$

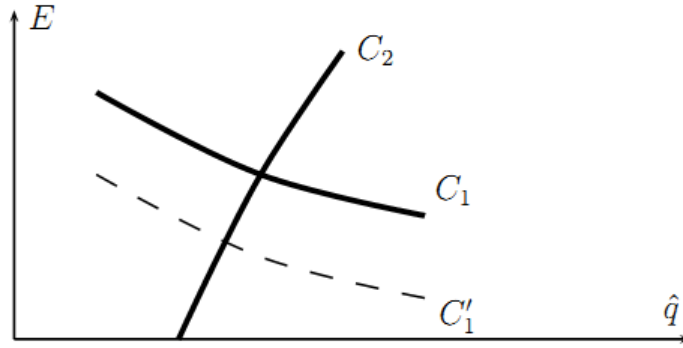
L'idée est d'éliminer s du système (54), (53) et (55) afin d'obtenir deux courbes dans le plan (\hat{q}, E) .

1. Courbe C_1 : l'élimination de s entre (54) et (53) conduit à

$$h = \frac{(\chi + \mu)\bar{\varphi}}{m\lambda\bar{\varphi} - \mu E} \frac{1}{E} - \kappa + (\chi + \mu) \frac{\ln(1-E)}{E} \quad (75)$$

où $h =_{def} h(\hat{q})$. Le long de cette courbe, \hat{q} et E varient en sens opposés. En effet, $1/E$ et $\ln(1-E)/E = -1 - E/2 - E^2/3 - \dots$ sont des fonctions décroissantes de E et h est donc une fonction décroissante de E . Il en va de même pour \hat{q} puisque h est une fonction monotone croissante de \hat{q} . On obtient ainsi la courbe C_1 de la Figure A ci-dessous. Quand m augmente, on voit via (75) que h et donc \hat{q} diminuent pour E fixé. On obtient en conséquence une nouvelle courbe à gauche et en dessous de C_1 (cfr. Figure A).

Figure A



2. Courbe C_2 : l'élimination de s entre (53) et (55) conduit à

$$\eta \left[1 - \frac{1}{\bar{\varphi}} \left[\kappa + h - (\chi + \mu) \frac{\ln(1-E)}{E} \right] \right] \left[\kappa + h + \frac{\chi + \mu}{1-E} \right] - \hat{q}h' = 0 \quad (76)$$

Montrons que \hat{q} et E croissent ensemble sur cette courbe. Soit $F(\hat{q}, E) = 0$ l'équation définissant C_2 ci-dessus. Comme $dF = d\hat{q} \partial F / \partial \hat{q} + dE \partial F / \partial E = 0$, il faut montrer $\partial F / \partial \hat{q}$ et $\partial F / \partial E$ sont de signes contraires. D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \hat{q}} &= -\frac{\eta h'}{\bar{\varphi}} \left[\kappa + h + \frac{\chi + \mu}{1-E} \right] + \eta h' \left[1 - \frac{1}{\bar{\varphi}} \left[\kappa + h - (\chi + \mu) \frac{\ln(1-E)}{E} \right] \right] - (\hat{q}h')' \\ &= -\eta h' s + \eta h' \left[1 - s + \frac{1}{\bar{\varphi}} \left[\frac{\chi + \mu}{1-E} + (\chi + \mu) \frac{\ln(1-E)}{E} \right] \right] - (\hat{q}h')' \\ &= -2\eta h' s + (\eta - 1)h' - \hat{q}h'' + \eta h' \frac{\bar{\varphi}}{\chi + \mu} G(E) \end{aligned}$$

où $G(E) =_{def} \frac{1}{1-E} + \frac{\ln(1-E)}{E}$. Comme $h'' > 0$, une condition suffisante pour que $\partial F / \partial \hat{q} < 0$ est

$$G(E) < \tau =_{def} \frac{\bar{\varphi}}{\chi + \mu} \left[\frac{1}{\eta} - 1 + 2s \right] \quad (77)$$

Or si $0 \leq E \leq 1$, $\frac{\ln(1-E)}{E} < -1$, ce qui implique $G(E) < \frac{1}{1-E} - 1 = \frac{E}{1-E}$. En conséquence, sous la condition (57), on a bien (77) et donc que $\partial F / \partial \hat{q} < 0$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial E} &= \frac{\eta(\underline{\chi} + \underline{\mu})}{\bar{\varphi}} \left(\frac{\ln(1-E)}{E} \right)' \left[\underline{k} + h + \frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1-E} \right] + \frac{\eta(\underline{\chi} + \underline{\mu})}{(1-E)^2} \left[1 - \frac{1}{\bar{\varphi}} \left[\underline{k} + h - (\underline{\chi} + \underline{\mu}) \frac{\ln(1-E)}{E} \right] \right] \\ &= \eta s(\underline{\chi} + \underline{\mu}) \left(\frac{\ln(1-E)}{E} \right)' + \frac{\eta(\underline{\chi} + \underline{\mu})}{(1-E)^2} [1 - s + G(E)] = \frac{\eta(\underline{\chi} + \underline{\mu})}{(1-E)^2} [1 - s - sH(E) + G(E)] \\ &\text{où } H(E) =_{def} -(1-E)^2 \left(\frac{\ln(1-E)}{E} \right)' = \frac{E(1-E) + (1-E)^2 \ln(1-E)}{E^2}.\end{aligned}$$

Comme $G(E) > 0$, une condition suffisante pour $\partial F/\partial E > 0$ est $s[1 + H(E)] < 1$ ou encore $s < \frac{1}{1+H(E)}$; il suffit donc que $s < \max_E \frac{1}{1+H(E)}$. Or $H(E)$ est une fonction monotone décroissante sur $[0, 1]$ ayant son maximum en $H(0) = 1/2$. En conséquence, une condition suffisante pour $\partial F/\partial E > 0$ est

$$s < \frac{2}{3} \quad (78)$$

Donc si (77) et (78) sont vérifiées, C_2 est une courbe croissante dans le plan (\hat{q}, E) . Vu (76), on observe que cette courbe est indépendante de m . Par conséquent, si m augmente, l'équilibre se déplace avec C_1 le long de C_2 , ce qui implique que E et \hat{q} (et donc aussi ρ via (40)) décroissent en m et établit la première partie de la Proposition 1.

7.6.2 Signe de $d\tilde{y}, d\tilde{x}, d\tilde{c}$

Comme le point 1 ci-avant a établi que le taux d'épargne $s =_{def} \tilde{k}/\bar{\varphi}\tilde{y}$ est plus faible quand m est plus élevé, il en découle que le rapport capital/output stationnaire (\tilde{k}/\tilde{y}) est lui aussi plus faible: comme \tilde{k} ne dépend pas de m (cfr. Lemme 1), une valeur plus élevée de m implique des valeurs plus élevées de \tilde{y} et donc aussi de \tilde{x} (proportionnel à \tilde{y}) et \tilde{c} (qui varie du même montant que \tilde{y}).

7.6.3 Signe de du, dp_x, dv, dw

L'évolution de u se déduit de (47). Le membre de gauche de cette expression augmente car s baisse quand m augmente. Par ailleurs, lorsque la valeur de \hat{q} est plus faible, le terme en \hat{q} du membre de droite l'est aussi puisque h est une fonction croissante et convexe. L'égalité ne peut donc être maintenue que si u est plus élevé. Comme on le déduit de (30),

$$p_x = \frac{u}{1-E} \quad (79)$$

L'évolution du prix de la ressource est la résultante de deux effets contradictoires, l'un positif lié à la hausse de u , l'autre négatif lié à la baisse de E . On ne peut trancher analytiquement lequel des deux effets domine. Numériquement, p_x peut voler dans les deux sens.

Le lien entre v et m (via l'impact négatif de m sur \hat{q}) se déduit de (48). Enfin, comme $u = v + \lambda w$ et comme u est plus élevé, on en déduit que w est nécessairement plus élevé lorsque v diminue ou reste stable. Par continuité, il en va aussi ainsi quand v n'augmente pas trop et donc quand σ n'est pas trop élevée.

7.6.4 Parts stationnaires des facteurs dans la VA

Sous l'hypothèse (49), $PSVA_t = w_t L_t / y_t = w_t \lambda_t k_t / y_t$, de sorte que

$$PKVA_t + PSVA_t = 1 - \alpha + u_t \frac{k_t}{y_t} + w_t \lambda_t \frac{k_t}{y_t} = 1 - \alpha + u_t \frac{k_t}{y_t}.$$

On en déduit que

$$PRVA_t = 1 - (PKVA_t + PSVA_t) = \alpha - u_t \frac{k_t}{y_t}.$$

A l'état stationnaire, $k/y = \varphi s$ et on obtient donc $PRVA = \alpha - \varphi s u$.

De (73), on tire, sous l'hypothèse (49),

$$u = \alpha \left[\underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1 - E} \right]^{-1}. \quad (80)$$

On peut également réécrire (53) comme suit,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} s &= \underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1 - E} - \frac{\chi + \mu}{1 - E} - \frac{\chi + \mu}{E} \ln(1 - E) \\ &= \underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1 - E} - [\chi + \mu] G(E) \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1 - E} = \bar{\varphi} s + [\chi + \mu] G(E). \quad (81)$$

En utilisant cette égalité, on réécrit (80) comme

$$u = \frac{\alpha}{\bar{\varphi} s + [\chi + \mu] G(E)}.$$

En substituant u par cette valeur dans $PRVA = \alpha - \varphi s u$, on obtient (59).

A l'équilibre stationnaire, (24) et (26) impliquent que $\psi(q_t)/\psi(q_{t-1}) = \beta^\sigma [1 + \rho]^\sigma$ et $\varphi(q_{t-1})$ tend vers $\bar{\varphi}$. L'expression stationnaire de la PKVA est donc (60).

7.6.5 Impact de m sur la PRVA

De l'expression stationnaire (59) de la PRVA, on tire aisément que

$$\frac{d \text{PRVA}}{\text{PRVA}} = \frac{\bar{\varphi} s}{[\chi + \mu] G(E) + \bar{\varphi} s} \left[E \frac{G'(E)}{G(E)} \frac{dE}{E} - \frac{ds}{s} \right].$$

On sait qu'une valeur de m plus élevée entraîne des valeurs plus faibles de E et de s . Pour qu'elle implique aussi une PRVA plus faible, il faut donc que l'expression entre crochets ci-dessus soit négative. Cela sera le cas si

$$\phi_G \left[-\frac{dE}{E} \right] > \left[-\frac{ds}{s} \right] \quad \text{avec} \quad \phi_G = E \frac{G'(E)}{G(E)} \quad (82)$$

où $\phi_G \geq 1$ est croissant en E . Montrons que, sous la condition suffisante (62), il en va bien ainsi lorsque $dm/m > 0$.

Ecrivons tout d'abord le système (53-55) sous forme différentielle:

$$\bar{\varphi} s \frac{ds}{s} = h'(\hat{q}) \hat{q} \frac{d\hat{q}}{\hat{q}} + [\chi + \mu] G(E) \frac{dE}{E} \quad (83)$$

$$\frac{dE}{E} = \frac{ds}{s} - \frac{m \lambda \bar{\varphi}}{m \lambda \bar{\varphi} - \mu} \frac{dm}{m} \quad (84)$$

$$-\frac{s}{1-s} \frac{ds}{s} = \frac{\frac{\chi + \mu}{1-E}}{\underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1-E}} \frac{dE}{E} + [1 + \phi_{h'} - \eta[1-s]] \frac{d\hat{q}}{\hat{q}} \quad (85)$$

où $\phi_{h'} = \hat{q} \frac{h''(\hat{q})}{h'(\hat{q})} \geq 0$.

De (83), on tire (en utilisant (55)) que

$$\frac{d\hat{q}}{\hat{q}} = \frac{\bar{\varphi} s}{\eta[1-s] \left[\underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1-E} \right]} \frac{ds}{s} - \frac{[\chi + \mu] G(E)}{\eta[1-s] \left[\underline{\kappa} + h(\hat{q}) + \frac{\chi + \mu}{1-E} \right]} \frac{dE}{E}.$$

En substituant $d\hat{q}/\hat{q}$ par cette expression dans (85) et en utilisant (81), on obtient après l'une ou l'autre manipulation élémentaire:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{s}{1-s} - \left[\frac{1+\phi_{h'}}{\eta[1-s]} - 1 \right] \frac{\bar{\varphi}s}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} \right] \frac{ds}{s} \\ &= \left[\frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1-E} E}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} - \left[\frac{1+\phi_{h'}}{\eta[1-s]} - 1 \right] \frac{[\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} \right] \frac{dE}{E}. \end{aligned}$$

En insérant (84) dans cette dernière expression, on obtient finalement une relation entre le taux de variation de l'épargne et celui de m :

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{s}{1-s} + \left[\frac{1+\phi_{h'}}{\eta[1-s]} - 1 \right] - \frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1-E} E}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} \right] \frac{ds}{s} \\ &= - \left[\frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1-E} E}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} - \left[\frac{1+\phi_{h'}}{\eta[1-s]} - 1 \right] \frac{[\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} \right] \frac{m\lambda\bar{\varphi}}{m\lambda\bar{\varphi} - \underline{\mu}} \frac{dm}{m}. \end{aligned} \quad (86)$$

Désignons par Υ l'expression entre crochets dans le membre de gauche de (86). En substituant ds/s par (86) dans (84), on obtient une relation entre le taux de variation de E et celui de m :

$$-\Upsilon \frac{dE}{E} = \left[\frac{s}{1-s} + \left[\frac{1+\phi_{h'}}{\eta[1-s]} - 1 \right] \frac{\varphi s}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} \right] \frac{m\lambda\bar{\varphi}}{m\lambda\bar{\varphi} - \underline{\mu}} \frac{dm}{m}. \quad (87)$$

En utilisant (86-87), vérifions (82):

$$\begin{aligned} & \phi_G \left[-\frac{dE}{E} \right] - \left[-\frac{ds}{s} \right] \\ &= \frac{1}{\Upsilon} \left[\frac{\phi_G s}{1-s} + \frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1-E} E}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} + \left[\frac{1+\phi_{h'}}{\eta[1-s]} - 1 \right] \frac{\phi_G \varphi s - [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} \right] \frac{m\lambda\bar{\varphi}}{m\lambda\bar{\varphi} - \underline{\mu}} \frac{dm}{m}. \end{aligned} \quad (88)$$

Le terme entre crochets du membre de droite est certainement positif si $\phi_G \varphi s - [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E) \geq 0$, c'est-à-dire si

$$\varphi s \geq [\underline{\chi} + \underline{\mu}] \frac{G(E)}{\phi_G} = [\underline{\chi} + \underline{\mu}] \frac{[G(E)]^2}{EG'(E)}. \quad (89)$$

Or (53) implique que

$$\varphi s > [\underline{\chi} + \underline{\mu}] \frac{\ln[1-E]^{-1}}{E} \quad \text{où} \quad \frac{\ln[1-E]^{-1}}{E} \geq 1 \geq \frac{[G(E)]^2}{EG'(E)} \geq 0,$$

pour $0 \leq E \leq 1$. L'inégalité (89) est donc nécessairement vérifiée.

La condition (82) sera donc satisfaite si $\Upsilon > 0$ puisqu'alors (88) > 0 lorsque $dm/m > 0$. Comme

$$\frac{\frac{\underline{\chi} + \underline{\mu}}{1-E}}{\bar{\varphi}s + [\underline{\chi} + \underline{\mu}] G(E)} \in [0, 1],$$

une condition largement suffisante pour que $\Upsilon > 0$ est que

$$\frac{s}{1-s} + \left[\frac{1+\phi_{h'}}{\eta[1-s]} - 1 \right] > \frac{E}{1-E}.$$

Il en découle (62).